1re

VOIE GÉNÉRALE

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

Enseignement mathématique

MANUEL COLLABORATIF

Automatismes

Des exercices pour démarrer chaque cours de l'année

LLS.fr/EM1Rituels

lelivrescolaire.fr
Éditeur de manuels scolaires collaboratifs et innovants

IMPRIMÉ EN FRANCE

www.lelivrescolaire.fr
manuel numérique consultable gratuitement

La communauté d'auteurs

Sous la coordination de

Vincent Brée, Université de Pau et des Pays de l'Adour, académie de Bordeaux, et
Philippe De Sousa, Lycée Geoffroy Saint-Hilaire, académie de Versailles

Notre comité scientifique

Muriel Boulakia, enseignante-chercheuse à l'université de Versailles Saint-Quentin
Jonathan Harter, professeur agrégé, CPGE au Lycée Montaigne de Bordeaux
Vincent Pantaloni, IA-IPR, académie d'Orléans-Tours
Jean-Jacques Seitz, IA-IPR, académie de Clermont-Ferrand
Matthieu Solnon, professeur agrégé, CPGE au Lycée La Martinière Monplaisir de Lyon
Christophe Vitalis, IA-IPR, académie de Versailles

8 Auteurs

2 Auteurs harmonisateurs

74 Coauteurs

… ont participé à l'écriture de ce manuel de Mathématiques !

Académie d'Aix-Marseille

Jérôme Calmeil, professeur certifié au Lycée Viala-Lacoste (13)
Sabine Courbet, professeure agrégée au Collège Louis Aragon (13)
Alexandra Devilers, professeure certifiée au Collège Henri Margalhan (13)
Nelly Maly, professeure certifiée au Collège Viala-Lacoste (13)
Bruno Swiners, professeur certifié au Collège Château Double (13)

Académie d'Amiens

Nathalie Chalard, professeure certifiée au Lycée Sainte-Famille (80)
Alexandra Laidet, professeure certifiée au Lycée Condorcet (02)

Académie de Besançon

Didier Ollivier, professeur certifié au Lycée Jacques Duhamel (39)

Académie de Bordeaux

Stéphane Cabanne, professeur certifié au Lycée Saint-Caprais (47)
Dang Liem Do, professeur agrégé au Collège Victor Duruy (40)
Yendoukoh Falani, professeur certifié au Lycée Le Beau Rameau (64)

Académie de Clermont-Ferrand

Gérard Régnon, professeur certifié au Collège Sainte-Procule (03)

Académie de Créteil

Rachid Bekhtaoui, professeur agrégé au Lycée Georges Clemenceau (93)
Habib Chetitah, professeur certifié à l'Ensemble scolaire La Salle Saint-Denis (93)
Amadou Diallo, professeur certifié au Collège Gustave Courbet (93)
Jérôme Dieudonné, professeur agrégé au Lycée Les Pannevelles (77)
Loïc Evanno, professeur certifié au Lycée Étienne Bezout (77)
Dominique Foucriat, professeure certifiée retraitée
Perrine Godebin, professeure certifiée au Lycée Charlotte Delbo (77)
Claire Merlin, professeure certifiée au Lycée Charlotte Delbo (77)
Arnaud Travaillée, professeur agrégé au Collège Jacques Monod (77)
Yannick Vincent, professeur agrégé au Lycée Lucie Aubrac (93)

Académie de Dijon

Léonidasse Dimanche, professeur agrégé au Collège Gabriel Bouthière (71)
Anthony Guinot, professeur agrégé au Lycée Lamartine (71)

Académie de Grenoble

Marie-Noëlle Cotte, professeure certifiée au Lycée Camille Corot (38)
Déborah Monin, professeure certifiée à l'Institution Saint-Charles (38)
Raphaël Normand, professeur certifié au Lycée Amédée Gordini (74)
Aurélie Vaccaro, professeure certifiée à l'Institution Saint-Charles (38)
Delphine Wenzek, professeure agrégée au Lycée Charles Baudelaire (74)

Académie de Lille

Nicolas Coqueau, professeur certifié au Lycée André Malraux (62)
Marjory Godin, professeure certifiée au Collège Maxence Van Der Meersch (62)

Frédérique Hutin, professeure certifiée au Lycée Paul Duez (59)
Manuel Mondésir-Rouanet, professeur à l'IMT Nord Europe (59)
Marie Morel, professeure certifiée au Lycée André Malraux (62)

Académie de Lyon

Marie Darmé, professeure certifiée au Lycée Saint-Pierre (42)
Armand Lachand, professeur agrégé au Lycée Claude Fauriel (42)
Sandrine Larôme, professeure certifiée au Lycée Pierre Termier (69)
Lucas Ligout, professeur certifié au Collège Georges Charpak (01)
Jérôme Vallin, professeur agrégé au Lycée La Martinière Monplaisir (69)

Académie de Nancy-Metz

Sophie Balland, professeure certifiée au Collège Michel de Montaigne (88)
Nathalie Braun, professeure certifiée au Lycée Rosa Parks (57)
Jacky Ledrappier, professeur certifié au Lycée Pierre et Marie Curie (88)
Amélie Spitzensteder, professeure certifiée à l'Ensemble scolaire Jeanne d'Arc Saint-Joseph (88)
Édouard Zidah, professeur certifié au Collège des Recollets (54)

Académie de Nantes

Laureline Colin Beuzard, professeure certifiée au Collège Jules Ferry (72)
Gaël Guyot, professeur certifié au Lycée La Herdrie (44)

Académie de Nice

Frank D'Esquermes, professeur certifié au Lycée Simone Veil (06)
Maëva Lossouarn, professeure agrégée au Collège Pablo Picasso (06)
Stéphane Renouf, professeur certifié au Lycée Beaussier (83)

Académie de Normandie

Aline Koch, professeure agrégée au Lycée Raymond Queneau (76)

Académie d'Orléans-Tours

Delphine Péron, professeure agrégée
Sandra Thépaut-Lemeunier, professeure agrégée au Lycée Grandmont (37)

Académie de Paris

Perla Carotche, professeure certifiée (75)
Hugo Jacquin, professeur agrégé au Lycée Janson-de-Sailly (75)
Antoine Rogier, professeur agrégé au Lycée Auguste Renoir (75)

Académie de Poitiers

Mohammed Belcadi, professeur certifié au Lycée Marcel Berthelot (86)
Pauline Magné, professeure certifiée au Collège André Brouillet (86)

Académie de Reims

Oualid Bouabdillah, professeur agrégé au Lycée Denis Diderot (52)
Sylvie Perceau, professeure certifiée au Collège Saint-Joseph (10)

Académie de Rennes

Marie-Annick Derrien, professeure agrégée au Lycée Saint-Joseph-Bossuet (22)
Catherine Pennarun, professeure certifiée retraitée
Ludovic Vandomme, professeur certifié au Collège Chateaubriand (35)

Académie de Strasbourg

Isabelle Guillou, professeure certifiée au Lycée épiscopal de Zillisheim (68)
Pierre Le Gall, professeur agrégé au Lycée Heinrich Nessel (67)
Schaeffer Quynh-Nhu, professeure agrégée au Lycée général Leclerc (67)
Samuel Unterberger, professeur certifié au Lycée Sainte-Clotilde (67)

Académie de Toulouse

Flora Brin, professeure certifiée au Lycée Charles de Gaulle (31)
Éric Castadere, professeur certifié au Lycée Auch-Beaulieu-Lavacant (32)
François Desnoyer, professeur agrégé au Lycée Stéphane Hessel (31)
Jérôme Haudry, professeur agrégé au Lycée Clément Marot (46)

Académie de Versailles

Abderrahim Azil, professeur certifié au Lycée Saint-Charles (91)
Hélène Cochard, professeure agrégée au Lycée Blaise Pascal (91)
Bahia Guellati Hidouche, professeure certifiée au Lycée La Salle Saint-Rosaire (95)
Agathe Loiseau, professeure agrégée au Lycée Paul Langevin (92)
Florence Lomprez, professeure certifiée au Lycée La Source (92)
Marianne Steib, professeure agrégée au Lycée Dumont d'Urville (78)
Régis Tourrenc, professeur certifié au Lycée Jean Rostand (78)

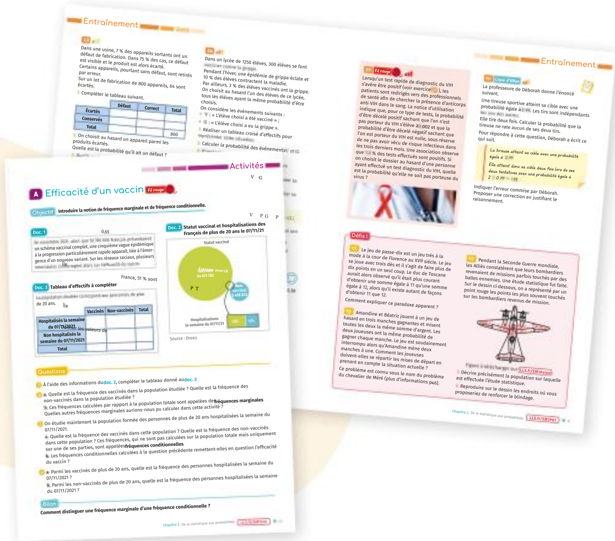
Reste du monde

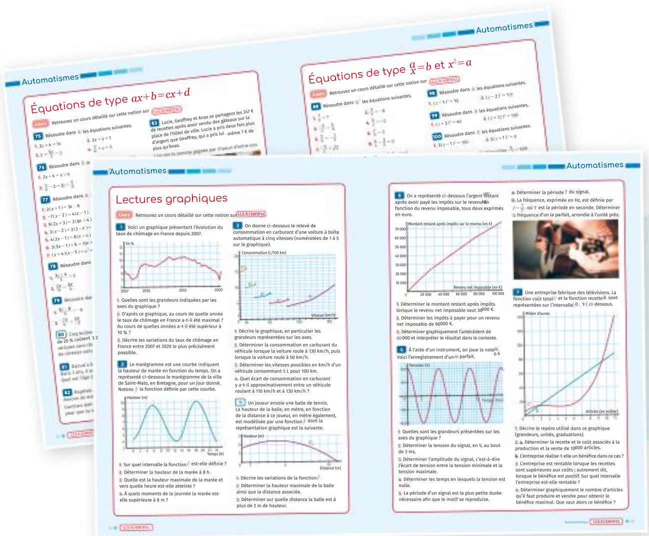
Ágnes Barta-Domfeld, professeure certifiée au Collège-Lycée ELTE Apáczai Csere János (Hongrie)
Dominique De Luca, professeur certifié au Lycée Stendhal (Italie)
Yohann Nyirumulinga, professeur au Lycée de Galatasaray (Turquie)
Daniel Rabbany, professeur à l'École française de Téhéran (Iran)
Sébastien Rivillon, professeur agrégé au Lycée franco-libanais Nahr Ibrahim (Liban)
Fayçal Tib, professeur certifié au Lycée français international Marcel Pagnol (Paraguay)
Mehdi Troudi, professeur certifié au Groupe scolaire René Descartes (Tunisie)

Bienvenue dans votre manuel de Mathématiques !

Les incontournables du manuel

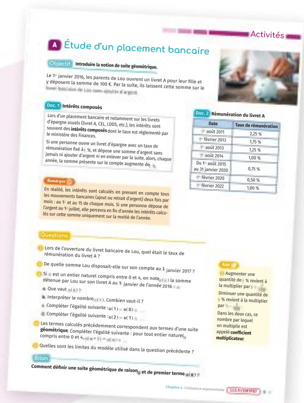
* Des **activités documentaires** introduisent chaque notion mathématique.
* Le **cours** est accompagné de nombreux exemples et de **méthodes** pour apprendre pas à pas.
* De nombreux exercices de niveaux de difficulté variée conviendront à tous les élèves.





Revoir les automatismes

* Des pages spécifiques permettent de se remettre à niveau sur des habiletés mathématiques élémentaires.
* De nombreuses propositions d'**exercices rituels** très rapides sont disponibles pour entamer chaque cours de l'année.

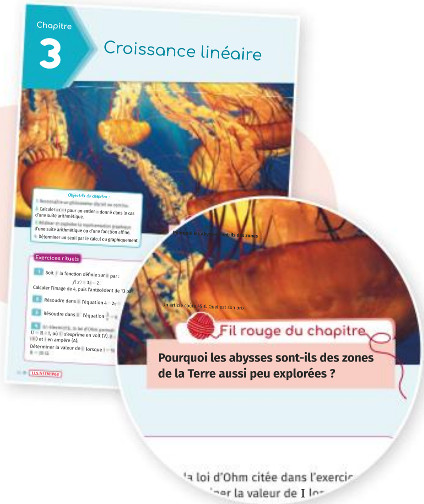


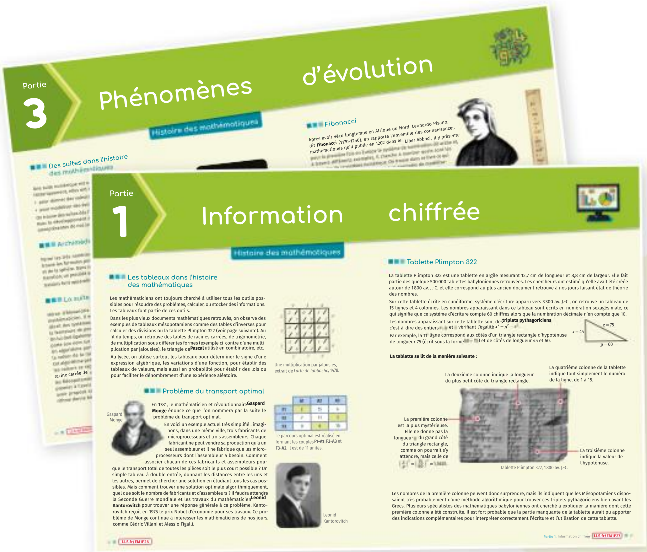
Pluridisciplinarité

* Les activités et exercices sont en lien avec des **thèmes variés** : l'économie, la sociologie, l'environnement, la physique, etc.
* Des **données réelles et concrètes** viennent élargir les connaissances des élèves.

Un fil rouge

* Une **question concrète** ouvre chaque chapitre.
* Au cours du chapitre, des exercices spécifiques donnent des éléments de réponse à cette question.
* En conclusion de chapitre, le fil rouge devient un sujet d'**exposé** pour lequel des pistes de recherche sont proposées.

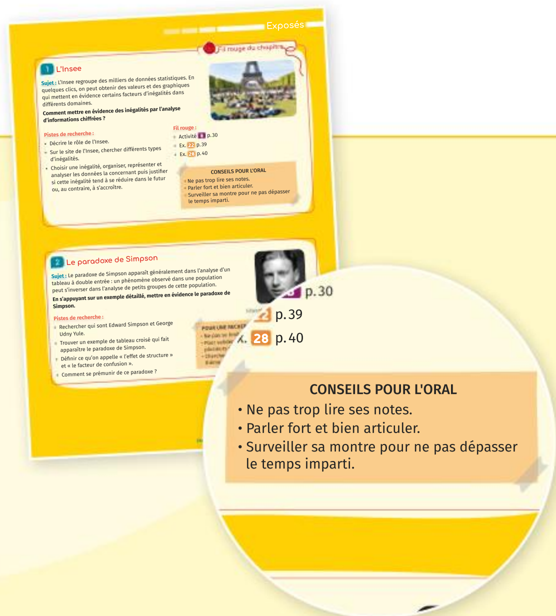




Des pages histoire des maths

* Au début de chaque partie, ces rubriques permettent de replacer les notions étudiées dans leur **contexte historique**.
* Des documents historiques viennent illustrer ces pages.

Travailler l'oral



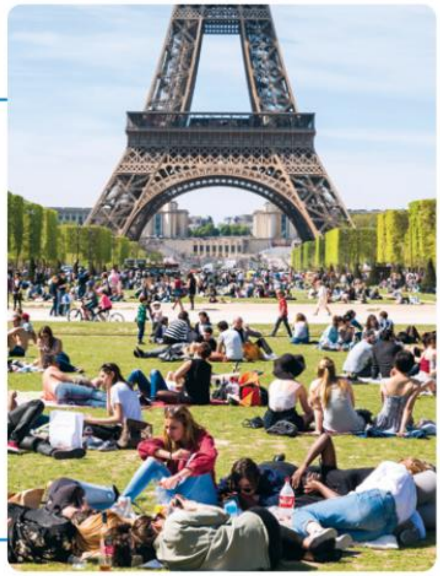
Des sujets d'exposés

* Des exemples d'exposés sont proposés pour appliquer les notions du chapitre dans un contexte réel.
* Ils sont agrémentés de **conseils pour l'oral** et de pistes de recherche.

Sommaire

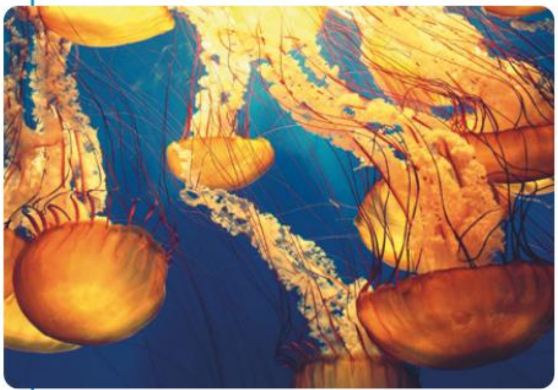
Exercices rituels et automatismes

Partie 1 Information chiffrée



Partie 2 - Probabilités

Partie 3 - Phénomènes d'évolution



Partie 4 - Dérivation

Les pictos du manuel

- Exercice permettant de vérifier que les connaissances de base sont acquises.
- Exercice permettant de contrôler les connaissances avant un devoir.
- Exercice permettant d'évaluer si les notions ont été comprises en profondeur.
- Exercice dont il faut retrouver l'énoncé à partir des réponses.
- Exercice où il faut trouver et corriger les erreurs d'une copie d'élève.
- Exercice à réaliser à l'aide d'une calculatrice.
- 1 Exercice dont le corrigé se trouve à la fin du manuel.
- Fil rouge Exercice en lien avec le fil rouge du chapitre.

Activités GeoGebra

Retrouvez gratuitement de nombreuses activités GeoGebra interactives pour visualiser des concepts de tous les chapitres sur LLS.fr/EM1GeoGebra.

Partie transverse : Automatismes

Cette partie du programme vise à construire et à entretenir des habiletés mathématiques (connaissances, procédures et stratégies) dans les domaines des représentations graphiques, du traitement des données et du calcul. Il s'agit à la fois de garantir un socle de connaissances et de compétences fondamentales nécessaires à tout citoyen, d'asseoir des réflexes intellectuels pour s'engager avec succès dans la résolution de problèmes et pour développer une posture critique et réfléchie dans la lecture et la représentation de données.

Sans faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique, le développement des capacités énoncées ci-dessous requiert un entraînement régulier tout au long de l'année, par exemple lors d'activités ritualisées de début de séance sous forme de « questions flash », privilégiant l'activité mentale et la verbalisation des procédures.

Représentations graphiques

- Préciser sur un graphique les grandeurs en jeu, les unités et les échelles.
- Lire sur un graphique les variations d'une grandeur : croissance ou décroissance, doublement régulier, accélération ou ralentissement de la croissance.
- Estimer graphiquement une valeur atteinte, un antécédent, un seuil.

Traitement de données

- Appliquer un pourcentage d'augmentation ou de diminution.
- Calculer un taux d'évolution global à partir de taux d'évolution successifs, calculer un taux d'évolution réciproque.

Calcul numérique et algébrique

- Effectuer mentalement des calculs simples mettant en jeu des nombres décimaux, des fractions et des pourcentages.
- Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, sous forme de pourcentage).
- Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat.
- Effectuer une application numérique d'une formule mathématique (longueurs, aires, volumes) ou d'une formule simple provenant d'une autre discipline.
- Résoudre une équation du premier degré du type $ax+b=cx+d$ ou $\frac{a}{x}=b$ ou une équation du second degré du type $x^2=a$.

Analyse de l'information chiffrée

Situations et problèmes	Contenus mathématiques
• Analyse croisée de couples de caractères (exemples : genre, âge, revenus, indicateurs de santé, indicateurs financiers, température, niveau des océans, proportion de gaz à effet de serre, etc.). • Les données peuvent être présentées sous la forme d'un tableau ou d'un diagramme obtenu à partir d'un fichier de données en utilisant un tableur.	• Analyse statistique de deux caractères. • Tableau croisé d'effectifs. • Exemples d'analyse du croisement de deux caractères par représentation graphique (nuage de points, diagrammes en barres, diagrammes circulaires). • Détermination dans un fichier de données d'un sous-ensemble d'individus répondant à un sous-caractère (filtre, utilisation des ET, OU, NON).

Capacités attendues

- Dresser un tableau croisé de deux caractères à partir d'un fichier de données.
- Utiliser un tableur pour représenter des données sous forme de tableau ou de diagramme.

Phénomènes aléatoires

Situations et problèmes	Contenus mathématiques
• Tests médicaux : faux positifs et faux négatifs. • Modélisation ou simulation de jeux simples : pile ou face, jeu de « croix ou pile » de d'Alembert, jeu de pierre-feuille-ciseaux, jeu du lièvre et de la tortue, jeu du « passe-dix » (problème du grand-duc de Toscane). • Stratégie gagnante au jeu de Monty Hall. • Traduction en langage des probabilités de la correspondance épistolaire entre Fermat et Pascal à propos du problème des partis.	• Fréquence conditionnelle, fréquence marginale. • Probabilité conditionnelle : définition, notation, calcul à partir d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre de probabilités. • Indépendance de deux événements. • Succession d'événements indépendants, équiprobables ou non.

Capacités attendues

- Construire un tableau croisé d'effectifs ou un arbre de probabilité associé à un phénomène aléatoire.
- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales à partir d'un tableau croisé d'effectifs.
- Interpréter un tableau croisé en utilisant des fréquences conditionnelles.
- Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre pondéré.

Phénomènes d'évolution

Croissance linéaire

Situations et problèmes	Contenus mathématiques
• Placement à intérêts simples, croissance d'un poste budgétaire. • Motifs géométriques évolutifs en forme de T ou de croix, carré bordé. • Correspondance entre degrés Celsius et Fahrenheit. • Modélisation de l'offre et de la demande par des fonctions affines, point d'équilibre. • Modélisation du barème de l'impôt sur le revenu par une fonction affine par morceaux (taux marginal, taux moyen). • Modèle linéaire de l'évolution du niveau moyen des océans.	**Suites arithmétiques** • Définition par la relation de récurrence. • Explicitation du terme de rang n. • Sens de variation. • Représentation graphique. **Fonctions affines** • L'objectif est de remobiliser les connaissances abordées en classe de seconde : représentation graphique, sens de variation, lien entre le taux d'accroissement et le coefficient directeur de la droite représentative.

Capacités attendues

- Reconnaître un phénomène discret ou continu de croissance linéaire et savoir le modéliser.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite arithmétique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite arithmétique ou d'une fonction affine.
- Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance linéaire.

Croissance exponentielle

Situations et problèmes	Contenus mathématiques
• Élimination d'une substance dans le sang. • Motifs géométriques évolutifs (triangle de Sierpinski, etc.). • Emprunt, placement à intérêts composés, gestion d'une dette, croissance d'un poste budgétaire. • Valeur au bout d'une fraction d'annuité d'un capital placé à intérêts composés à taux annuel constant. • Analyse comparée de l'accroissement d'une population et des ressources alimentaires (modèle de Malthus). • Modélisation simplifiée de la propagation d'une rumeur (cascades verticales). • Nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon au bout d'une fraction de demi-vie. • Applications à la médecine et à la datation par le carbone 14. • Taux de reproduction R_0 d'un virus lors d'une épidémie.	**Suites géométriques à termes strictement positifs** • Définition par relation de récurrence. • Explicitation du terme de rang n. • Sens de variation. • Représentation graphique. **Fonctions exponentielles** • Introduction de la fonction $x \mapsto ax$ ($ax > 0$, $x \leqslant 0$). • Propriétés algébriques (admises, par extension des propriétés des puissances entières). • Variations. • Représentation graphique. • Cas particulier de l'exposant $1/n$. • Taux d'évolution moyen correspondant à n évolutions successives.

Capacités attendues

- Reconnaître un phénomène discret ou continu de croissance exponentielle et savoir le modéliser.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite géométrique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Calculer un taux d'évolution moyen.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite géométrique ou d'une fonction exponentielle.
- Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique.

Variation instantanée

Situations et problèmes	Contenus mathématiques
• Courbe de croissance d'un enfant. • Vitesse instantanée d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne. • Vitesse d'apparition d'un produit ou de disparition d'un réactif dans une réaction chimique. • Coût marginal défini comme la variation du coût total induite par la production et la vente d'une unité supplémentaire, et modélisé par la dérivée du coût total.	• Tangente à une courbe en un point. • Nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.

Capacités attendues

- Interpréter le nombre dérivé dans le cadre d'un modèle d'évolution.
- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Décrire les variations d'un phénomène en mobilisant la dérivée d'une fonction.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à trois (la forme factorisée de la dérivée pourra être donnée).
- Prévoir l'évolution d'un phénomène grâce à l'étude de la dérivée d'une fonction.

Variation globale

Situations et problèmes	Contenus mathématiques
• Modélisation par une fonction du coût de production et du chiffre d'affaires d'une entreprise, étude du bénéfice. • Optimisation des dimensions d'un emballage pour en réduire le coût.	• Fonction dérivée. • Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la fonction dérivée sur un intervalle. • Dérivée des fonctions constante, identité, carré et cube. • Dérivée d'une somme, du produit par un nombre réel. • Application à la dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. • Tableau de variation, à l'aide si besoin d'un logiciel de calcul formel.

Rituel 1

1 Quel nombre est le plus grand : 10 % de 210 ou 15 % de 160 ?

2 Une automobiliste roule à 125 km/h pendant 42 min. Quelle distance a-t-elle parcourue ?

3 Quel est le taux d'évolution réciproque, arrondi à 0,1 % près, d'une augmentation de 24 % ?

4 La puissance électrique, en watt, est le produit de l'intensité, en ampère, par la tension, en volt. Calculer une valeur approchée au centième près de l'intensité correspondant à une puissance de 2 000 W avec une tension de 205 V.

5 Donner la valeur exacte de $\frac{12}{5}+\frac{13}{17}$.

Rituel 2

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x-2=x+1$.

2 Compléter la phrase suivante :
« Augmenter une quantité de 5 % revient à la multiplier par … ».

3 Donner un ordre de grandeur de $\sqrt{145}$.

4 Écrire $\frac{18}{5}$ sous forme décimale.

5 Combien y a-t-il de minutes dans 1,25 h ?

Rituel 3

1 Un prix passe de 10 € à 18 €. Calculer le taux d'évolution subi par ce prix.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $\frac{-9}{x}=30$.

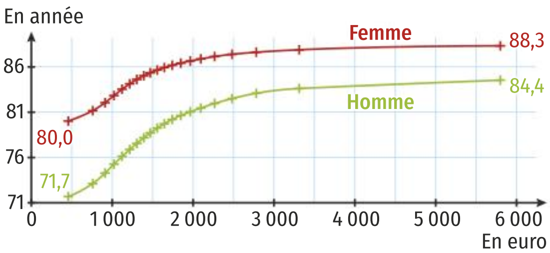
3 Donner l'écriture décimale de $3+5\times2+6\div4$.

4 Calculer $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$.

5 Une boîte contient 1 497 bonbons. Pour Halloween, on réalise des sachets contenant chacun 20 bonbons. Déterminer un ordre de grandeur du nombre de sachets complets que l'on peut réaliser au maximum.

Rituel 4

1 Ce graphique donne l'espérance de vie à la naissance chez les hommes et les femmes en fonction de leur revenu mensuel.



Décrire ce graphique, notamment les grandeurs présentes et les unités utilisées.

2 Un article vendu à 175 € est soldé à −20 %. Calculer son nouveau prix.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=121$.

4 Écrire $\frac{21}{35}$ sous forme décimale.

5 Calculer $0{,}017+1{,}54$.

Rituel 5

1 Combien de temps faut-il à un cycliste, en minute, pour parcourir 45,5 km à une vitesse moyenne de 26 km/h ?

2 Calculer $-\left(\frac{3}{2}\right)^2-(2+1)\times\left(3-\frac{4}{3}\right)$.

3 Donner l'écriture décimale de $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$.

4 Un prix augmente de 5 % et ensuite de 3 %. Calculer le taux d'évolution global correspondant à ces deux augmentations successives.

5 Quelle est la longueur, arrondie au cm près, du côté d'un carré d'aire 30 m² ?

Rituel 6

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x-1=\frac{1}{3}x+2$.

2 Une pièce rectangulaire a pour dimensions 2,39 m de largeur et 4,98 m de longueur. Déterminer un ordre de grandeur de sa surface au sol.

3 Calculer $3-5\times2-6\div4$.

4 Calculer 40 % de 80.

5 Par combien faut-il multiplier son salaire pour qu'il augmente de 3,5 % ?

Rituel 7

1 Donner un ordre de grandeur de la surface d'un terrain de football rectangulaire de longueur 101 m et de largeur 69 m.

2 Déterminer le nombre de secondes dans 1 h 30.

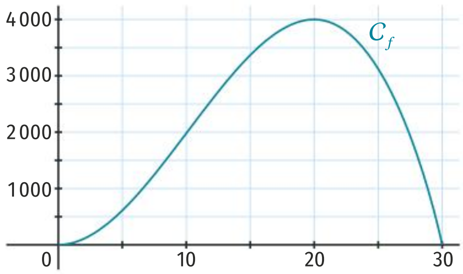
3 Écrire $\frac{12}{16}$ sous forme d'un pourcentage.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-98=0$.

5 Déterminer le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 %.

Rituel 8

1 On s'intéresse à une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



Décrire les variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\ ;30]$.

2 Écrire $\frac{55}{88}$ sous forme décimale.

3 Calculer 25 % de 144.

4 Le nombre 2 est-il solution de l'équation $3x^2-3x+2=0$?

5 Donner un ordre de grandeur de $19\,994\times21$.

Rituel 9

1 Calculer la hauteur d'un triangle d'aire 183 cm² et dont la base associée mesure 12 cm.

2 Un article est vendu 370 € hors taxe. Quel est son prix TTC sachant qu'il est soumis à une TVA de 5,5 % ?

3 Donner une valeur approchée au dixième près des solutions de l'équation $3x^2 - 5 = 0$.

4 Quel est le taux d'évolution réciproque, arrondi à 0,1 % près, d'une diminution de 12,6 % ?

5 Calculer $-2x^2 + 6x + 4$ lorsque $x = -12$.

Rituel 10

1 Calculer et écrire sous forme irréductible $\frac{2}{5} - \frac{3}{4}$.

2 Si on augmente la longueur de chaque côté d'un carré de 10 %, par combien son aire est-elle multipliée ?

3 Écrire 25 % sous forme d'une fraction irréductible.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $\frac{7}{x} = -2$.

5 Donner un ordre de grandeur du périmètre d'un cercle de rayon 10 cm.

Rituel 11

1 Calculer 40 % de 300.

2 Calculer le taux d'évolution global correspondant à deux hausses successives de 20 %.

3 Calculer 101×99.

4 Écrire $\frac{490}{210}$ sous forme irréductible.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x - \frac{2}{3} = 0$.

Rituel 12

1 Une personne a bu plusieurs verres d'alcool. La concentration d'alcool dans son sang varie selon la courbe suivante.

Combien de temps cette personne devra-t-elle attendre pour conduire sachant que la limite autorisée est de 0,2 g/L dans le sang ?

2 Calculer la vitesse moyenne en km/h d'un véhicule qui parcourt 50 m en 12 s.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 9$.

4 Calculer $0,5 + 1,16 - 0,08$.

5 Par combien doit-on multiplier une quantité qui subit une baisse de 21,7 % ?

Rituel 13

1 Calculer l'aire, arrondie au mm² près, d'un disque de rayon 18 cm.

2 Un avion parcourt 675 nautiques en 2 h 15. Quelle est sa vitesse moyenne en nœud (nautique par heure) ?

3 Calculer $-0{,}25x^2+5x-3$ lorsque $x=-4$.

4 Un article soumis à la TVA de 20 % coûte 190,80 €. Quel est son prix hors taxe ?

5 La température augmente de 15 % de 8 h du matin à midi puis diminue ensuite de 25 % de midi à 20 h. Calculer le taux d'évolution global de la température entre 8 h et 20 h.

Rituel 14

1 Calculer 51×49.

2 Comparer $\frac{7}{5}$ et $\frac{3}{2}$.

3 Calculer 75 % de 36.

4 Un coureur parcourt 1 km en 6 min 30 s. Mettrait-il plus de 4,5 h à ce rythme pour courir un marathon d'approximativement 42 km ?

5 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $\frac{-6}{x}=-18$.

Rituel 15

1 Calculer le taux d'évolution global correspondant à deux hausses successives de 40 %.

2 Écrire sous forme irréductible $\frac{15}{100}$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{x+1}{3}=2x-1$.

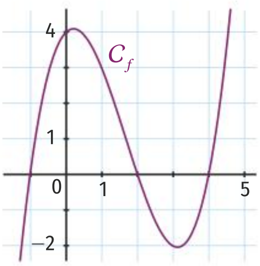
4 Un seau de 15 L est rempli en 18 s à l'aide d'un tuyau d'arrosage. Combien de seaux de 18 L peut-on remplir en 1 h avec ce débit ?

5 Un cure-dent mesure 7 cm. Combien faut-il en mettre bout à bout au minimum pour atteindre la hauteur de la tour Eiffel, soit environ 300 m ?

Rituel 16

1 On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

Déterminer le nombre d'antécédents de 0 par f.



2 Écrire 3,5 sous forme d'une fraction irréductible.

3 Une quantité a été multipliée par 2 puis par 3. Quel est le pourcentage d'augmentation subi par cette quantité ?

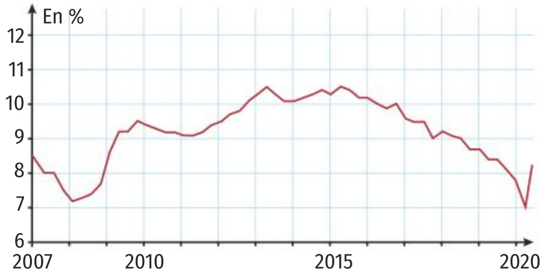
4 Comparer $\frac{25}{3}$ et 8.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2+9=-9$.

Lectures graphiques

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P14.

1 Voici un graphique présentant l'évolution du taux de chômage en France depuis 2007.

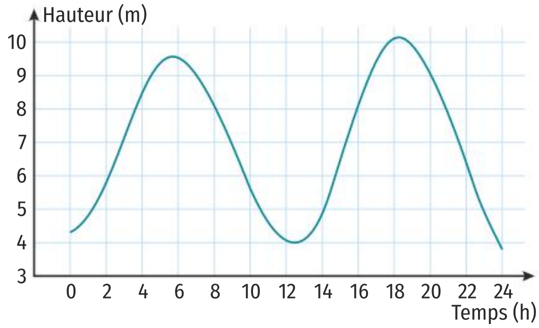


1. Quelles sont les grandeurs indiquées par les axes du graphique ?

2. D'après ce graphique, au cours de quelle année le taux de chômage en France a-t-il été maximal ? Au cours de quelles années a-t-il été supérieur à 10 % ?

3. Décrire les variations du taux de chômage en France entre 2007 et 2020 le plus précisément possible.

2 Le marégramme est une courbe indiquant la hauteur de marée en fonction du temps. On a représenté ci-dessous le marégramme de la ville de Saint-Malo, en Bretagne, pour un jour donné. Notons f la fonction définie par cette courbe.



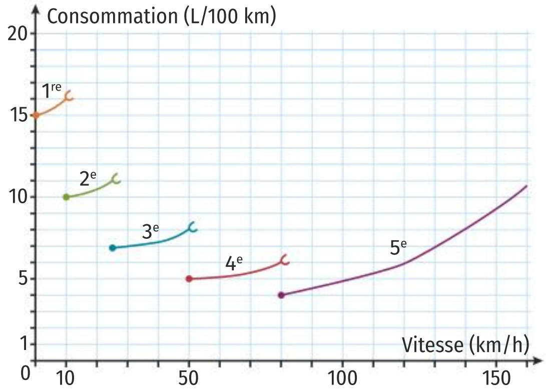
1. Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?

2. Déterminer la hauteur de la marée à 8 h.

3. Quelle est la hauteur maximale de la marée et vers quelle heure est-elle atteinte ?

4. À quels moments de la journée la marée est-elle supérieure à 8 m ?

3 On donne ci-dessous le relevé de consommation en carburant d'une voiture à boîte automatique à cinq vitesses (numérotées de 1 à 5 sur le graphique).



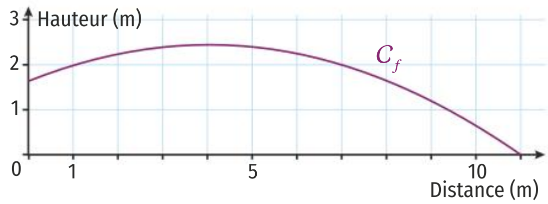
1. Décrire le graphique, en particulier les grandeurs représentées sur les axes.

2. Déterminer la consommation en carburant du véhicule lorsque la voiture roule à 130 km/h, puis lorsque la voiture roule à 50 km/h.

3. Déterminer les vitesses possibles en km/h d'un véhicule consommant 5 L pour 100 km.

4. Quel écart de consommation en carburant y a-t-il approximativement entre un véhicule roulant à 110 km/h et à 130 km/h ?

4 Un joueur envoie une balle de tennis. La hauteur de la balle, en mètre, en fonction de la distance à ce joueur, en mètre également, est modélisée par une fonction f dont la représentation graphique est la suivante.

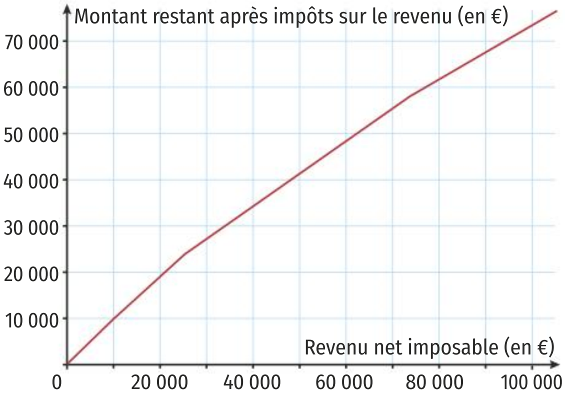


1. Décrire les variations de la fonction f.

2. Déterminer la hauteur maximale de la balle ainsi que la distance associée.

3. Déterminer sur quelle distance la balle est à plus de 2 m de hauteur.

5 On a représenté ci-dessous l'argent restant après avoir payé les impôts sur le revenu en fonction du revenu imposable, tous deux exprimés en euro.

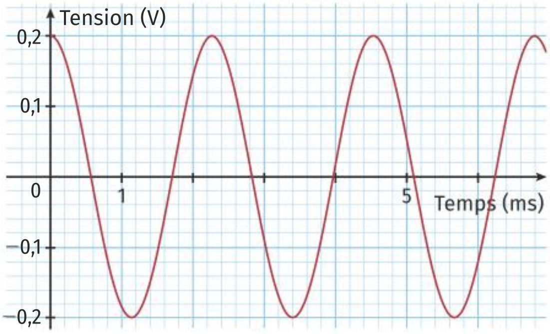


1. Déterminer le montant restant après impôts lorsque le revenu net imposable vaut 30 000 €.

2. Déterminer les impôts à payer pour un revenu net imposable de 90 000 €.

3. Déterminer graphiquement l'antécédent de 60 000 et interpréter le résultat dans le contexte.

6 À l'aide d'un instrument, on joue la note *la*. Voici l'enregistrement d'un *la* parfait.



1. Quelles sont les grandeurs présentées sur les axes du graphique ?

2. Déterminer la tension du signal, en V, au bout de 3 ms.

3. Déterminer l'amplitude du signal, c'est-à-dire l'écart de tension entre la tension minimale et la tension maximale.

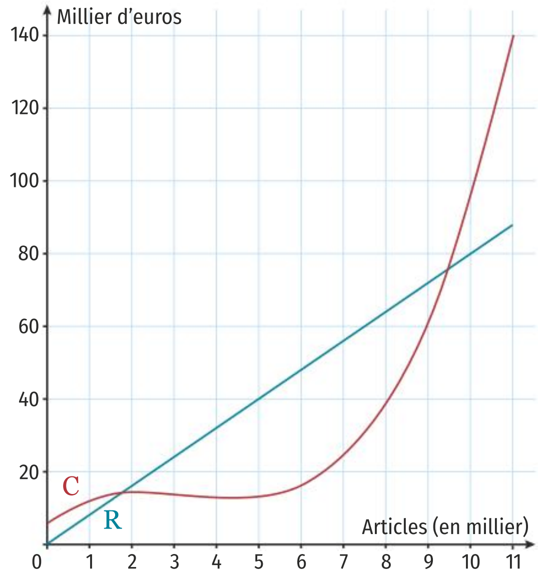
4. Déterminer les temps en lesquels la tension est nulle.

5. La période d'un signal est la plus petite durée nécessaire afin que le motif se reproduise.

a. Déterminer la période T du signal.

b. La fréquence, exprimée en Hz, est définie par $f = \frac{1}{T}$, où T est la période en seconde. Déterminer la fréquence d'un la parfait, arrondie à l'unité près.

7 Une entreprise fabrique des télévisions. La fonction coût total C et la fonction recette R sont représentées sur l'intervalle $[0 ; 11]$ ci-dessous.



1. Décrire le repère utilisé dans ce graphique (grandeurs, unités, graduations).

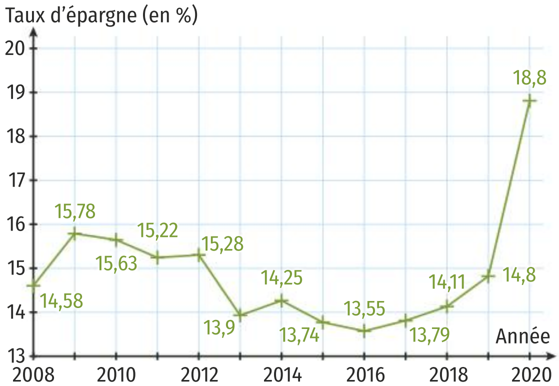
2. a. Déterminer la recette et le coût associés à la production et la vente de 10 000 articles.

b. L'entreprise réalise-t-elle un bénéfice dans ce cas ?

3. L'entreprise est rentable lorsque les recettes sont supérieures aux coûts ; autrement dit, lorsque le bénéfice est positif. Sur quel intervalle l'entreprise est-elle rentable ?

4. Déterminer graphiquement le nombre d'articles qu'il faut produire et vendre pour obtenir le bénéfice maximal. Que vaut alors ce bénéfice ?

8 Le taux d'épargne est égal à la part des revenus bruts que les ménages consacrent à leur épargne. Voici un graphique présentant l'évolution du taux d'épargne des ménages français de 2008 à 2020.

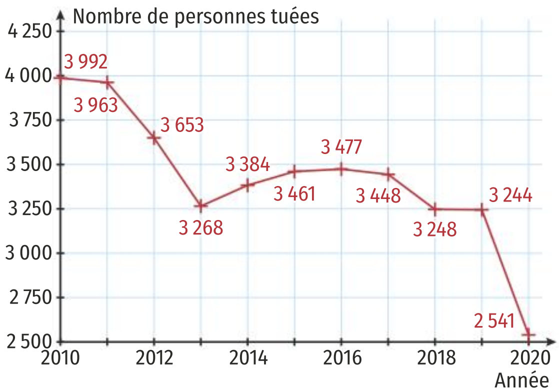


1. Déterminer le taux d'épargne des Français en 2018.

2. Décrire le sens de variation du taux d'épargne des Français entre 2014 et 2020.

3. En quelle année le taux d'épargne des Français a-t-il été le plus bas ? Le plus haut ?

9 Le graphique suivant indique le nombre de personnes décédées sur le réseau routier français de 2010 à 2020.

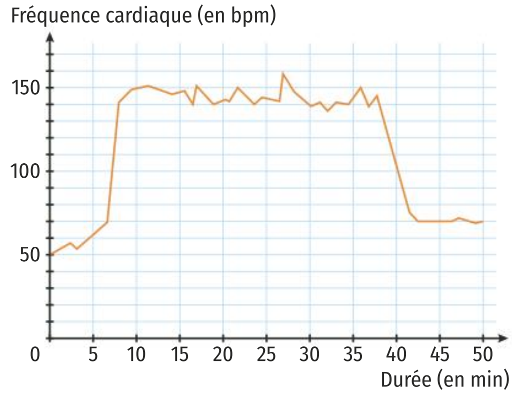


1. Combien de personnes sont décédées sur le réseau routier français en 2015 ?

2. Décrire l'évolution du nombre de personnes décédées sur le réseau routier français de 2010 à 2020.

3. Au cours de quelle année le nombre de décès sur le réseau routier français est-il devenu inférieur à 3500 ?

10 Ce graphique montre l'évolution de la fréquence cardiaque, en bpm (battements par minute), d'un cycliste lors d'une course.



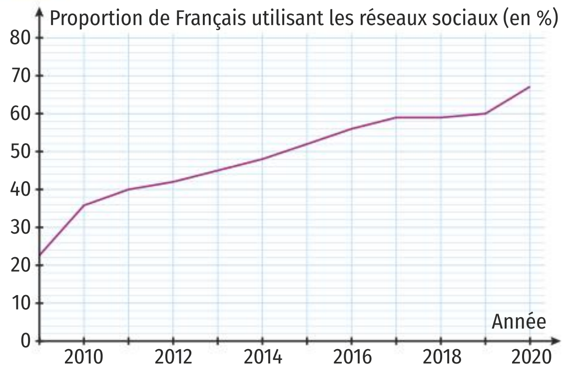
1. Déterminer la fréquence cardiaque du cycliste au départ de la course.

2. Quelle est la fréquence cardiaque maximale atteinte par le cycliste au cours de cette course ?

3. Au bout de combien de temps le cycliste a-t-il doublé sa fréquence cardiaque par rapport à celle mesurée en début de course ?

4. Déterminer l'intervalle de temps durant lequel la fréquence cardiaque était au moins de 110 bpm.

11 On considère le graphique suivant.

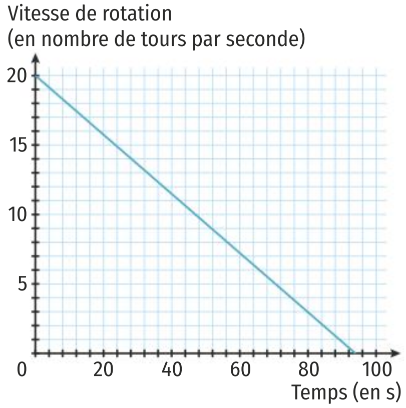


1. Que représente ce graphique ?

2. Déterminer de combien de points la proportion de Français utilisant les réseaux sociaux a augmenté entre 2010 et 2020.

3. Peut-on dire que l'augmentation de la proportion de Français utilisant les réseaux sociaux est de plus en plus forte ?

12 Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse de rotation d'un hand-spinner en fonction du temps.

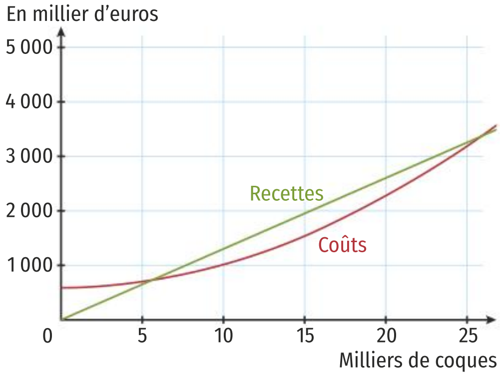


1. Déterminer la vitesse du hand-spinner au bout d'une minute.

2. Au bout de combien de temps le hand-spinner voit-il sa vitesse divisée par 2 par rapport à sa vitesse initiale ?

3. Donner un ordre de grandeur du nombre de tours faits par le hand-spinner lors des vingt premières secondes.

13 Le graphique ci-dessous représente les coûts et recettes d'un fabricant de coques de téléphones haut de gamme en fonction du nombre de coques produites.

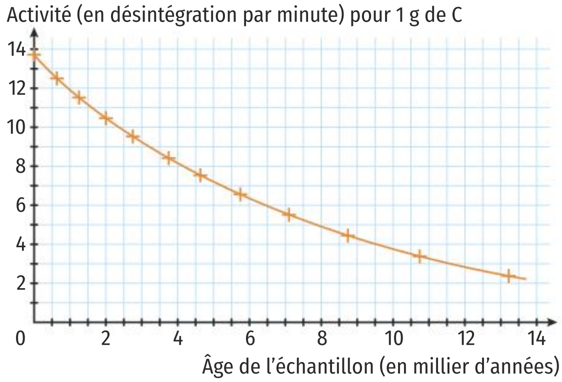


1. Décrire le sens de variation des coûts de production.

2. Le **bénéfice** est la différence entre les recettes et les coûts. Déterminer un intervalle sur lequel le bénéfice réalisé est positif.

3. L'affirmation « Produire plus permet de gagner plus » est-elle correcte dans ce cas ? Justifier.

14 On a représenté ci-dessous l'activité radioactive d'un gramme de carbone 14 en fonction du temps.

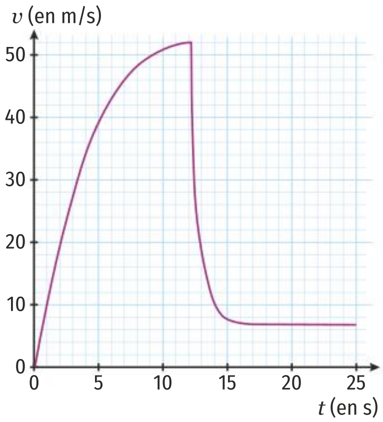


1. Déterminer l'activité du carbone 14 au bout de 10 000 ans.

2. Déterminer au bout de combien d'années l'activité devient inférieure à quatre désintégrations par minute.

3. Le temps de demi-vie est le temps nécessaire pour que la moitié des atomes se désintègrent naturellement.
Déterminer le temps de demi-vie du carbone 14.

15 Le graphique ci-dessous donne l'évolution de la vitesse d'un sauteur en parachute en fonction du temps.



1. Donner un intervalle de temps durant lequel le sauteur est en phase d'accélération.

2. Au bout de combien de temps le sauteur a-t-il ouvert son parachute ?

3. Une fois le parachute ouvert, à quelle vitesse le parachutiste descend-il ? Convertir le résultat en km/h.

Calcul numérique

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P18.

***Pour les exercices* 16 *à* 20**

Effectuer sans calculatrice les calculs et écrire les résultats sous forme décimale.

16 **1.** $3{,}4 + 7{,}55$ **2.** $5{,}2 + 1{,}948$
3. $6{,}1 + 2{,}4 + 8{,}9$ **4.** $33{,}4 + 18{,}6 + 5$

17 **1.** $5{,}2 - 3{,}148$ **2.** $4{,}18 - 2{,}64$
3. $1{,}3 - 2{,}9$ **4.** $4{,}65 - 6$

18 **1.** $4{,}2 + 5{,}5 - 3{,}1$ **2.** $14{,}5 - 6{,}8 - 4{,}5$
3. $1{,}14 + 2{,}28 - 3{,}42$ **4.** $1{,}85 - 12 + 6{,}1 - 3{,}05$

19 **1.** $4 + 8 \times (-3)$ **2.** $5 \times (-2{,}1) + 7$
3. $(4{,}5 - 2{,}1) \times 10$ **4.** $6{,}7 \times (-1) + 8$
5. $18 \div 3 - 20$ **6.** $(-32) \div (-1) - 17$

20 **1.** $2{,}17 \times 10^{-2} + 7{,}55 \times 10^{-1}$
2. $1{,}55 \times 10^{3} + 2{,}5 \times 10^{-2}$

21 À la boulangerie, Ahmed a acheté deux croissants à 0,85 € l'unité et un pain de campagne à 1,35 €. Sans calculatrice, déterminer le prix payé par Ahmed.

22 Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants.

1. $0{,}4 \times 30$ **2.** $0{,}25 \times 80$ **3.** $0{,}125 \times 16$

23 Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants.

1. 101×91 **2.** 202×49
3. $28 \times 98 + 28 \times 2$ **4.** $72 \times 13 - 3 \times 72$

***Pour les exercices* 24 *à* 27**

Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants. En fonction du contexte, écrire les résultats sous forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

24 **1.** $\frac{7}{3} + \frac{2}{5}$ **2.** $\frac{13}{5} - \frac{3}{2}$
3. $\frac{4}{5} - \frac{6}{15}$ **4.** $\frac{10}{24} + \frac{41}{36}$

25 **1.** $7 - \frac{2}{13}$ **2.** $\frac{1}{4} + 2$
3. $\frac{5}{9} - 4$ **4.** $4{,}5 + \frac{5}{3}$

26 **1.** $\frac{1}{5} \times 180$ **2.** $\frac{3}{4} \times 124$
3. $36 \times \frac{5}{8}$ **4.** $25 \times \frac{8}{15}$

27 **1.** 30 % de 190 **2.** 5 % de 162
3. 50 % de 12 **4.** 12 % de 50
5. 100 % de 20 **6.** 300 % de 8

28 Dans un amphithéâtre de 125 étudiants, on compte 40 % d'étudiants boursiers. Calculer le nombre de boursiers.

29 Anselme a dépensé 20 €, soit 40 % de ses économies. Combien lui reste-t-il ?

30 Sans calculatrice, calculer et écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

1. $\frac{30}{8} \times \frac{24}{7}$ **2.** $\frac{25}{40} \times \frac{60}{10}$
3. $\frac{9}{5} \times \frac{60}{21}$ **4.** $\frac{2}{3} \div \frac{7}{3}$
5. $\frac{120}{15} \div \frac{80}{25}$ **6.** $\dfrac{\frac{28}{81}}{\frac{49}{45}}$

31 Dans une classe, un tiers des élèves sont des filles, parmi lesquelles un quart portent des lunettes. Quelle est la proportion de filles à lunettes dans la classe ?

Passer d'une écriture à une autre

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P19.

***Pour les exercices* 32 *à* 37**

Sans utiliser de calculatrice, écrire les nombres donnés sous forme décimale.

32 **1.** $\frac{18}{5}$ **2.** $\frac{-3}{4}$ **3.** $\frac{5}{8}$ **4.** $\frac{32}{8}$

33 **1.** $\frac{17}{8}$ **2.** $\frac{27}{12}$ **3.** $\frac{45}{6}$ **4.** $\frac{14}{28}$

34 **1.** $-\frac{77}{35}$ **2.** $\frac{-14\,589}{100}$ **3.** $\frac{21}{14}$ **4.** $\frac{81}{45}$

35 **1.** $127{,}5 \times 10^{-2}$ **2.** $34{,}5489 \times 10^{2}$

36 **1.** $4{,}17 \times 10^{-4}$ **2.** $3{,}141 \times 10^{2}$

37 **1.** -542×10^{-5} **2.** 4728×10^{-3}

38 On estime que la masse de la statue de la Liberté, en comptant son socle, vaut $2{,}25 \times 10^{5}$ kg et que la masse de la tour Eiffel vaut $1{,}01 \times 10^{7}$ kg. Parmi ces deux édifices, lequel est le plus lourd ?

***Pour les exercices* 39 *à* 41**

Sans utiliser de calculatrice, écrire les nombres suivants sous forme d'un pourcentage.

39 **1.** $\frac{12}{48}$ **2.** $\frac{39}{78}$ **3.** $\frac{1}{5}$ **4.** 3

40 **1.** $\frac{7}{20}$ **2.** $\frac{2}{25}$ **3.** 4 **4.** $\frac{21}{30}$

41 **1.** $\frac{10}{25}$ **2.** $\frac{24}{40}$ **3.** $\frac{15}{75}$ **4.** $\frac{27}{9}$

***Pour les exercices* 42 *à* 47**

Écrire les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

42 **1.** $\frac{135}{25}$ **2.** $\frac{462}{78}$ **3.** $\frac{-150}{210}$ **4.** 3,75

43 **1.** 18,75 **2.** 27,2 **3.** $-36{,}4$

44 **1.** 43,5 **2.** 123,2 **3.** 25 % **4.** 6,75

45 **1.** 12 **2.** 22,125 **3.** $4{,}5 \times 10^{-1}$ **4.** $0{,}0005 \times 10^{3}$

46 **1.** $4{,}2 \times 10^{2}$ **2.** 70 % **3.** $-54{,}8$ **4.** 1,333

47 **1.** $\frac{-45}{54}$ **2.** 0,707 **3.** 1,025 **4.** 3,14159

48 Jeanne a dépensé un quart de son salaire pour payer son loyer et deux cinquièmes de son salaire pour ses loisirs. Quelle proportion de son salaire, en pourcentage, lui reste-t-il ?

49 Durant une heure de cours, un enseignant de mathématiques passe un dixième de son temps à accueillir les élèves et à travailler sur une question flash, un quart de son temps à corriger les exercices donnés en devoir, trois dixièmes de son temps à apporter de nouvelles connaissances en cours et le reste du temps à travailler des exercices en classe. Quelle proportion, en pourcentage, occupe chacune de ces activités ?

Ordres de grandeur

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P20.

50 Comparer les nombres suivants.

1. $\frac{8}{25}$ et $\frac{8}{27}$. **2.** $\frac{-7}{32}$ et $\frac{-7}{41}$.

3. $\frac{15}{32}$ et $\frac{13}{30}$. **4.** $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{8}$.

51 Comparer $4\,720 \times 10^{-2}$ et $8\,752 \times 10^{-3}$.

Pour les exercices 52 à 55

Sans calculatrice, donner un ordre de grandeur des nombres donnés.

52 **1.** $9{,}89 \times 19{,}8$ **2.** $1{,}89 \times 2{,}99$

53 **1.** 30 % de 59,99. **2.** 1099×94

54 **1.** 25 % de 2007. **2.** 40 % de 4,8.

55 **1.** 75 % de 92. **2.** 50 % de 0,01.

56 Associer chacun des trajets suivants à la distance approximative correspondante.

Paris-Marseille •	• 500 000 000 cm
Terre-Lune •	• 800 000 m
Londres-New York •	• 400 000 km

Pour les exercices 57 à 65

Utiliser des approximations pour donner sans calculatrice un ordre de grandeur de la quantité demandée.

57 Le record du monde sur un 100 m, détenu par Usain Bolt, est de 9 secondes et 58 centièmes. Déterminer un ordre de grandeur de sa vitesse moyenne en km/h.

58 Le poids moyen d'un Français est de 74,1 kg. Dans l'ascenseur d'un immeuble, une étiquette porte l'inscription : « Poids total maximal autorisé : 300 kg ». En moyenne, combien de personnes peuvent monter dans cet ascenseur au maximum ?

59 Maëlie a acheté un ordinateur dont l'écran mesure 30 pouces. Sachant qu'un pouce vaut 2,54 cm, donner un ordre de grandeur de la taille de l'écran en cm.

60 Albert a déposé 10 978 € sur un livret rémunéré à 2,96 %. Donner un ordre de grandeur des intérêts qu'il va toucher au bout d'un an d'épargne.

61 Un morceau de sucre pèse 7,9 g. Donner une approximation du nombre de morceaux de sucre dans une boîte de 800 g.

62 Une voiture consomme 7,94 L tous les 100 km. Est-il possible de faire un trajet de 800 km avec un plein de 60 L ? Justifier.

63 Un paquet de 185 g contient des bonbons pesant chacun 7,4 g. Sachant que Côme a mangé $\frac{1}{3}$ du paquet, donner un ordre de grandeur du nombre de bonbons restants.

64 La distance d'arrêt d'une voiture, en mètre, est approximativement le carré du nombre de dizaines comprises dans sa vitesse, en km/h. Un conducteur roule à 132 km/h. Donner une estimation de sa distance d'arrêt.

65 Lors d'un épisode orageux, la différence de vitesse entre la propagation du son et celle de la lumière permet d'obtenir un ordre de grandeur évaluant la distance de l'observateur par rapport à l'éclair. De manière simplifiée, on compte la durée, en seconde, séparant l'apparition de l'éclair du grondement sonore, puis on divise par 3 pour avoir une estimation en km de cette distance. Un observateur compte 14 secondes séparant l'éclair et le grondement sonore. Donner une estimation de la distance séparant l'observateur de l'orage.

Applications numériques

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P21.

66 Le poids, en newton, est égal au produit de la masse, en kilogramme, par l'accélération de la pesanteur $g \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2$.

1. Calculer le poids en newton d'une personne pesant 77 kg.

2. Calculer la masse d'une personne dont le poids vaut 637 N.

67 Le volume d'une boule sphérique de rayon R est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Calculer le volume d'une sphère de rayon 25 cm. Donner la valeur exacte en cm³, puis une valeur approchée en L, arrondie à 0,1 près.

68 L'indice de masse corporelle (IMC) d'une personne adulte se calcule en fonction de la masse, en kg, et de la taille, en m, de cette personne à l'aide de la formule $\text{IMC} = \frac{\text{masse}}{\text{taille}^2}$.

Une personne possédant un IMC inférieur à 18 est considérée en insuffisance pondérale (maigreur) qui peut avoir des conséquences pour sa santé.

Déterminer la masse d'une personne adulte mesurant 1,60 m et d'IMC égal à 18.

69 Déterminer le nombre d'heures, minutes et secondes contenus dans 50 000 secondes.

70 En thermodynamique, la loi des gaz parfaits permet de relier la pression, le volume et la température d'un gaz à basse pression à l'aide de l'égalité $PV = nRT$, où P désigne la pression du gaz, en pascal, V son volume, en m³, T la température, en kelvin, n la quantité de matière, en mol, et $R = 8{,}314$ J/(K·mol) la constante des gaz parfaits.

Déterminer la température d'un gaz parfait lorsque $P = 150 \times 10^3$ Pa, $V = 20 \times 10^{-3}$ m³ et $n = 1{,}7$ mol.

71 La fibre installée récemment chez Jeanne permet d'envoyer des fichiers à une vitesse de 200 Mbit/s. Sachant qu'un octet correspond à 8 bits, calculer le temps nécessaire pour envoyer un fichier de 425 Mo.

72 Pour calculer la quantité d'alcool pur ingérée quand on boit un verre de boisson alcoolisée, on multiplie le volume bu, en L, par le degré de la boisson et par 0,8 kg/L qui correspond à la masse d'un litre d'alcool pur.

Par exemple, 25 cL de bière à 5° contiennent $0{,}25 \times \frac{5}{100} \times 0{,}8 = 0{,}01$ kg, soit 10 g d'alcool pur.

Calculer la masse d'alcool pur contenu dans un verre de 10 cL de vin à 12°.

73 En architecture, la formule de Blondel permet de savoir si un escalier peut être monté de manière agréable ou non par son utilisateur. Pour cela, le pas P, en cm, défini par la relation $P = 2h + G$, où h est la hauteur de marche (en cm) et G le giron (profondeur de la marche, également en cm), doit se situer entre 60 et 64 cm.

Déterminer l'encadrement du giron G d'une marche de 20 cm de hauteur.

74 L'indice de Ruffier, défini par $I = \frac{p_0 + p_1 + p_2 - 200}{10}$, où p_0 est la fréquence cardiaque au repos, p_1 la fréquence cardiaque après avoir fait 30 squats en moins de 45 secondes, et p_2 la fréquence cardiaque une minute après les flexions, toutes trois données en battements par minute (bpm).

Cet indice est un indicateur de la condition physique d'une personne. Sachant qu'on est considéré en très bonne condition physique si $I \leqslant 5$, déterminer si un individu avec $p_0 = 60$, $p_1 = 125$ et $p_2 = 95$ est en très bonne condition physique.

Équations de type $ax+b=cx+d$

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P22.

75 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $2x+4=14$ **2.** $2x=x+1$

3. $2=\frac{5x}{2}-3$ **4.** $\frac{3}{4}+x=5$

76 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $2x+4=x+9$ **2.** $3x-2=-2x+5$

3. $\frac{x}{4}-2=3x+\frac{5}{4}$ **4.** $3x-7=5x+2$

77 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $2(x+1)=3x-6$

2. $-7(x-2)=4(x-1)$

3. $9(2x+3)=3(8x+4)$

4. $3(x-2)+2(3-x)=5(x+7)$

5. $4(2x-1)=8(x+4)$

6. $3(5x-1)+6=15x+3$

7. $(x+4)(x-5)=x^2+2x-3$

78 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\frac{3x+4}{2}=5$ **2.** $\frac{5x-1}{6}=\frac{4}{9}$

3. $\frac{2x}{9}=\frac{8x}{4}$ **4.** $\frac{2x-7}{3}=\frac{7-x}{5}$

79 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\frac{5x-8}{5}=-6$ **2.** $\frac{-3x-2}{8}=\frac{-9}{3}$

3. $\frac{-7x}{4}=\frac{6x}{-5}$ **4.** $\frac{-7x+2}{5}=\frac{2-3x}{4}$

80 Cinq boîtes de céréales avec une réduction de 20 % coûtent 3,20 € de plus que trois boîtes de céréales sans réduction. Combien coûte une boîte de céréales sans réduction ?

81 Daoud a le triple de l'âge de son petit frère. Dans 3 ans, il aura le double de l'âge de son frère. Quel est l'âge de Daoud ?

82 Baptiste a eu 8 et 9 à ses deux premiers devoirs de maths (coefficient 1).

Combien doit-il avoir au devoir bilan (coefficient 2) pour que sa moyenne soit égale à 10 ?

83 Lucie, Geoffrey et Anas se partagent les 247 € de recettes après avoir vendu des gâteaux sur la place de l'hôtel de ville. Lucie a pris deux fois plus d'argent que Geoffrey, qui a pris lui-même 7 € de plus qu'Anas.

Calculer la somme gagnée par chacun d'entre eux.

84 Si tout le monde avait participé au cadeau de mariage de Louise et Anthony, la participation aurait été de 100 € par personne. Mais, à cause d'un imprévu, 16 personnes n'ont pas participé et chacun a dû payer 120 €.

Combien y avait-il initialement de participants prévus pour le cadeau ?

85 Lors d'une sortie au lycée, six enseignants emmènent trois classes de 30 élèves au cinéma. La place d'un adulte coûte 2 € de plus que la place d'un élève et le coût total de la sortie s'est élevé à 468 €.

Quel est le prix d'une place adulte ? D'une place élève ?

86 On choisit un nombre réel. La somme de son triple et de 5 est égale au double de sa différence avec 7.

Quel est ce nombre ?

87 On considère un triangle équilatéral dont le périmètre est égal à celui d'un carré dont les côtés mesurent 2 cm de moins que ceux du triangle.

Quelles sont les dimensions du triangle et du carré ?

Équations de type $\frac{a}{x}=b$ et $x^2=a$

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P23.

88 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les équations suivantes.

1. $\frac{7}{x}=1$ **2.** $\frac{3}{x}=-8$

3. $\frac{-2}{x}=\frac{5}{4}$ **4.** $\frac{5}{x}=-2$

5. $\frac{3}{x}=-\frac{1}{5}$ **6.** $\frac{\pi}{x}=2$

7. $\frac{-5}{x}=\sqrt{2}$ **8.** $\frac{4}{x}-\frac{3}{2}=0$

89 Résoudre dans $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$ l'équation $\frac{3}{x+2}=6$.

90 Résoudre dans $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ l'équation $\frac{5}{x-1}=2$.

91 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2=81$ **2.** $x^2+5=0$

3. $x^2-16=0$ **4.** $x^2=0$

92 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2=144$ **2.** $x^2-64=0$

3. $2x^2-18=0$ **4.** $75-3x^2=0$

93 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2=\frac{1}{4}$ **2.** $x^2=\frac{25}{36}$

3. $4x^2=9$ **4.** $5x^2=125$

94 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2=5$ **2.** $x^2+5=13$

3. $3x^2-21=0$ **4.** $5x^2+19=0$

95 Une chambre carrée a une surface de 12,25 m². Calculer ses dimensions.

96 Déterminer le périmètre d'un carré dont la surface vaut 36 cm².

97 La base d'une tasse de thé a une aire d'environ 34,54 cm². Sachant que l'aire d'un disque est donnée par $\mathcal{A}=\pi r^2$, déterminer à la calculatrice une valeur approchée du rayon de la tasse.

98 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x-1)^2=16$ **2.** $(x-2)^2=121$

99 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x+3)^2=49$ **2.** $(x+12)^2=169$

100 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $3(x-1)^2=192$ **2.** $5(x+7)^2=0$

101 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $\frac{5}{x^2}=500$.

102 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $\frac{3}{x^2}=147$.

103 L'énergie cinétique est l'énergie d'un corps due à son mouvement et elle est donnée, en joule, par la relation $E=\frac{1}{2}mv^2$, où m désigne la masse du corps étudié, en kg, et v sa vitesse, en m/s.

On mesure l'énergie cinétique d'une voiture de 1 500 kg en mouvement à 75 000 joules. Déterminer la vitesse du véhicule en m/s.

104 Les planètes du système solaire n'ont pas un mouvement circulaire mais en réalité un mouvement elliptique. La troisième loi de Kepler permet de relier la période de révolution d'une planète autour du Soleil et sa trajectoire à l'aide de la relation $\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$, où T désigne la période de révolution de la planète autour du Soleil en seconde, a le demi grand axe de l'ellipse en mètre, G la constante gravitationnelle et M la masse du Soleil en kg.

Sachant que $G=6{,}67\times10^{-11}$ N·m²/kg², $M=2\times10^{30}$ kg et que $a=150\times10^{9}$ m pour la Terre, calculer la période de révolution de la Terre.

Appliquer un pourcentage d'évolution

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P24.

105 Compléter les phrases suivantes.

1. Augmenter de 20 %, c'est multiplier par ...

2. Diminuer de 15 %, c'est multiplier par ...

3. Augmenter de 0,4 %, c'est multiplier par ...

4. Diminuer de 7,2 %, c'est multiplier par ...

106 Compléter les phrases suivantes.

1. Augmenter de 19,6 %, c'est multiplier par ...

2. Diminuer de 9 %, c'est multiplier par ...

3. Augmenter de 0,4 %, c'est multiplier par ...

4. Diminuer de 27,2 %, c'est multiplier par ...

107 Compléter les phrases suivantes.

1. Multiplier par 1,49, c'est ... de ... %.

2. Multiplier par 0,8, c'est ... de ... %.

3. Multiplier par 1,07, c'est ... de ... %.

4. Multiplier par 0,98, c'est ... de ... %.

108 Compléter les phrases suivantes.

1. Multiplier par 0,88, c'est ... de ... %.

2. Multiplier par 1,025, c'est ... de ... %.

3. Multiplier par 0,998, c'est ... de ... %.

4. Multiplier par 1,227, c'est ... de ... %.

109 Une veste d'une valeur initiale de 150 € subit une baisse de 15 %. Calculer son prix final.

110 Une personne de 90 kg perd 10 % de sa masse après un régime. Calculer sa nouvelle masse.

111 Une ville compte 50 000 habitants en 2022. La population augmente de 5 % en un an. Calculer le nombre d'habitants en 2023.

112 Un architecte, qui gagnait jusqu'ici 3 200 € net par mois, voit son salaire augmenter de 7 %. Calculer son nouveau salaire net.

113 Un article coûte 125 € HT (hors taxes). Pour obtenir son prix d'achat, c'est-à-dire le prix TTC (toutes taxes comprises), il faut augmenter le prix HT de 20 %. Calculer le prix TTC.

114 Au Texas, des températures glaciales ont mis à mal certaines installations électriques en février 2021. Certains habitants ont ainsi vu leur facture d'électricité, estimée habituellement à 165 €, exploser et augmenter de 10 000 %.

Calculer le montant exorbitant de leur facture.

115 Pour obtenir son salaire net à partir de son salaire brut, il faut retirer en moyenne 23 %.

À partir de cette moyenne, estimer le salaire net d'une personne gagnant 3 990 € brut.

116 Le nombre de licenciés d'un club passe de 400 à 360. Calculer l'évolution relative du nombre de licenciés de ce club.

117 Le salaire d'un célèbre footballeur a été multiplié par 2,7.

Calculer l'évolution relative de son salaire.

118 On estime que la population mondiale est passée de 4 079 480 000 individus en 1975 à 7 794 800 000 individus en 2020. Déterminer l'évolution relative, arrondie à 0,001 % près, de la population mondiale entre 1975 et 2020.

119 Un artisan possède un jardin carré dont le côté mesure 10 m. Il souhaite augmenter l'aire de son jardin de 21 % en conservant la forme carrée.

Quelle doit être la nouvelle longueur du côté du jardin ?

120 Le poids d'un bébé passe de 3,5 kg à la naissance à 8,5 kg à 1 an. Déterminer le taux d'évolution du poids.

Taux d'évolution successifs et réciproques

Cours Retrouvez un cours détaillé sur cette notion sur LLS.fr/EM1P25.

121 Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 10 %.

122 Calculer le taux d'évolution global correspondant à deux baisses de 30 %.

123 Calculer le taux d'évolution global correspondant à deux multiplications successives par 2.

124 Quel coefficient multiplicateur correspond à deux baisses de 50 % suivies d'une hausse de 100 % ?

125 Un article subit deux hausses de 50 %. Calculer le taux d'évolution global.

126 Le prix moyen d'une baguette de pain a augmenté de 0,87 % de 2011 à 2015, puis de 0,57 % de 2015 à 2017.

Calculer, à 0,001 % près, le taux d'évolution global du prix de la baguette de pain entre 2011 et 2017.

127 Dans un supermarché, une offre propose 10 % de remise sur le prix alors que l'autre propose 10 % de produit offert pour le même prix. Quelle offre est la plus intéressante ? Justifier.

128 Une quantité augmente de 20 % puis diminue de 20 %. Calculer le taux d'évolution global.

129 Une quantité baisse de 30 %. Retrouve-t-elle sa valeur initiale après une hausse de 40 % ?

130 Une quantité augmente de 25 %. Quel doit être le taux de diminution pour qu'elle retrouve sa valeur initiale ?

131 Mery affirme qu'après avoir subi trois hausses successives de 30 %, une quantité vaut plus du double de sa valeur initiale.

A-t-elle raison ? Justifier.

132 Au cours des deux dernières années, le prix du gaz a augmenté deux fois de 5 %.

Quel a été le taux d'évolution global ?

133 Quelle offre est la plus intéressante entre deux remises de 20 % successives et une seule remise de 40 % ? Justifier.

134 Lors d'une élection, un candidat affirme qu'il a obtenu 21 % de voix de plus que son concurrent. Ce dernier, de son côté, affirme pourtant qu'il n'en a obtenu que 17,36 % de moins.

Justifier que les affirmations des deux candidats ne sont pas incompatibles.

135 Généralement, on passe du prix HT au prix TTC en augmentant le prix HT de 20 %.
Cette augmentation correspondant à la TVA.

Dans ce cas, quelle baisse, en pourcentage, faut-il appliquer au prix TTC pour revenir au prix HT ? Arrondir à 0,1 % près.

136 Dans une ville, il y a eu une baisse de 10 % de la population.

Quel doit être le pourcentage d'augmentation pour que la ville retrouve son nombre initial d'habitants ? Arrondir à 0,1 % près.

137 Afin de faire des économies, un directeur propose une diminution immédiate des salaires de 20 %. Le mois suivant, le conseil d'administration a déclaré que cette mesure n'était pas applicable et qu'il fallait rétablir les salaires initiaux.

Quel pourcentage d'augmentation doit-on appliquer pour rétablir les salaires ?

Partie

1 Information

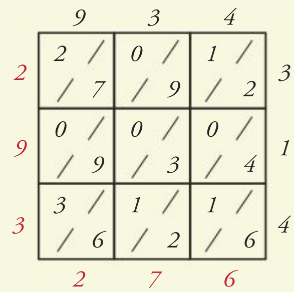
Histoire des mathématiques

Les tableaux dans l'histoire des mathématiques

Les mathématiciens ont toujours cherché à utiliser tous les outils possibles pour résoudre des problèmes, calculer, ou stocker des informations. Les tableaux font partie de ces outils.

Dans les plus vieux documents mathématiques retrouvés, on observe des exemples de tableaux mésopotamiens comme des tables d'inverses pour calculer des divisions ou la tablette Plimpton 322 (voir page suivante). Au fil du temps, on retrouve des tables de racines carrées, de trigonométrie, de multiplication sous différentes formes (exemple ci-contre d'une multiplication par jalousies), le triangle de **Pascal** utilisé en combinatoire, etc.

Au lycée, on utilise surtout les tableaux pour déterminer le signe d'une expression algébrique, les variations d'une fonction, pour établir des tableaux de valeurs, mais aussi en probabilité pour établir des lois ou pour faciliter le dénombrement d'une expérience aléatoire.



Une multiplication par jalousies, extrait de *Larte de labbacho*, 1478.

Problème du transport optimal


Gaspard Monge

En 1781, le mathématicien et révolutionnaire **Gaspard Monge** énonce ce que l'on nommera par la suite le problème du transport optimal.

En voici un exemple actuel très simplifié : imaginons, dans une même ville, trois fabricants de microprocesseurs et trois assembleurs. Chaque fabricant ne peut vendre sa production qu'à un seul assembleur et il ne fabrique que les microprocesseurs dont l'assembleur a besoin. Comment associer chacun de ces fabricants et assembleurs pour que le transport total de toutes les pièces soit le plus court possible ? Un simple tableau à double entrée, donnant les distances entre les uns et les autres, permet de chercher une solution en étudiant tous les cas possibles. Mais comment trouver une solution optimale algorithmiquement, quel que soit le nombre de fabricants et d'assembleurs ? Il faudra attendre la Seconde Guerre mondiale et les travaux du mathématicien **Leonid Kantorovitch** pour trouver une réponse générale à ce problème. Kantorovitch reçoit en 1975 le prix Nobel d'économie pour ses travaux. Ce problème de Monge continue à intéresser les mathématiciens de nos jours, comme Cédric Villani et Alessio Figalli.

	A1	A2	A3
F1	2	15	4
F2	7	11	3
F3	9	6	10

Le parcours optimal est réalisé en formant les couples **F1-A1**, **F2-A3** et **F3-A2**. Il est de 11 unités.


Leonid Kantorovitch

chiffrée

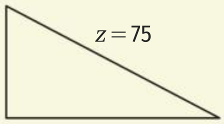
Tablette Plimpton 322

La tablette Plimpton 322 est une tablette en argile mesurant 12,7 cm de longueur et 8,8 cm de largeur. Elle fait partie des quelque 500 000 tablettes babyloniennes retrouvées. Les chercheurs ont estimé qu'elle avait été créée autour de 1 800 av. J.-C. et elle correspond au plus ancien document retrouvé à nos jours faisant état de théorie des nombres.

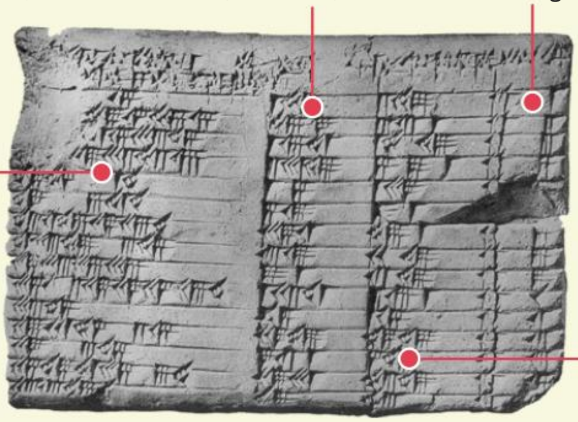
Sur cette tablette écrite en cunéiforme, système d'écriture apparu vers 3 300 av. J.-C., on retrouve un tableau de 15 lignes et 4 colonnes. Les nombres apparaissant dans ce tableau sont écrits en numération sexagésimale, ce qui signifie que ce système d'écriture compte 60 chiffres alors que la numération décimale n'en compte que 10.

Les nombres apparaissant sur cette tablette sont des **triplets pythagoriciens**, c'est-à-dire des entiers x, y et z vérifiant l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$.

Par exemple, la 11e ligne correspond aux côtés d'un triangle rectangle d'hypoténuse de longueur 75 (écrit sous la forme 60 + 15) et de côtés de longueur 45 et 60.



La tablette se lit de la manière suivante :



Tablette Plimpton 322, 1 800 av. J.-C.

Les nombres de la première colonne peuvent donc surprendre, mais ils indiquent que les Mésopotamiens disposaient très probablement d'une méthode algorithmique pour trouver ces triplets pythagoriciens bien avant les Grecs. Plusieurs spécialistes des mathématiques babyloniennes ont cherché à expliquer la manière dont cette première colonne a été construite. Il est fort probable que la partie manquante de la tablette aurait pu apporter des indications complémentaires pour interpréter correctement l'écriture et l'utilisation de cette tablette.

Chapitre 1

Analyse de l'information chiffrée

Objectifs du chapitre :

1. Analyser un ou plusieurs caractères sur une population.
2. Tracer et interpréter des représentations graphiques : tableaux, diagrammes et graphiques.

Fil rouge du chapitre

Comment mettre en évidence des inégalités par l'analyse d'informations chiffrées ?

Exercices rituels

1 Sans calculatrice, donner les résultats des calculs suivants.

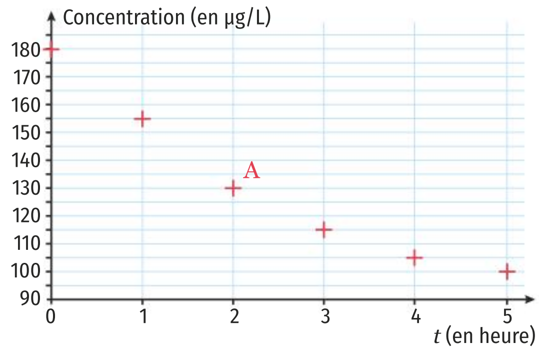
1. 10 % de 510. **2.** 25 % de 360.
3. 20 % de 250. **4.** 50 % de 1 270.

2 Lors des soldes, dans une boutique, tous les prix sont diminués de 20 %.

1. Un pantalon coûtait 55 €. Quel est son nouveau prix ?

2. Un pull coûte à présent 32 €. Combien valait-il avant la réduction ?

3 Donner une interprétation possible des coordonnées de A dans le graphique ci-dessous.

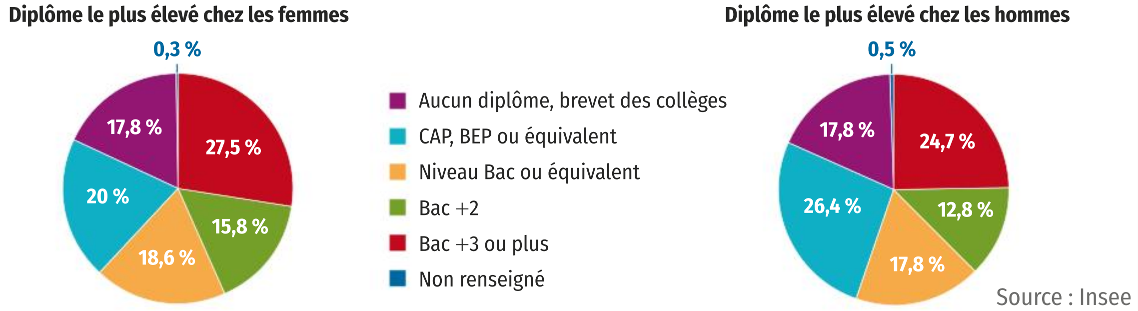


D'autres exercices rituels p. 10 ou sur LLS.fr/EM1Rituels

A Inégalités hommes-femmes au travail

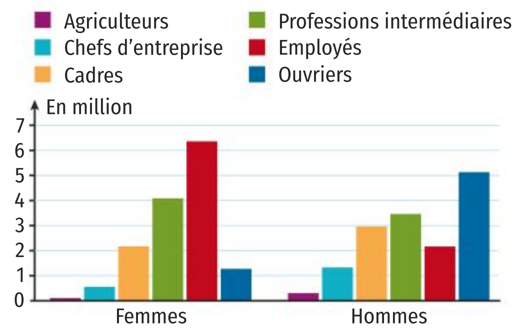
Objectif **Comparer l'utilisation de différentes représentations graphiques.**

Doc. 1 **Qualification des personnes de 25 à 64 ans résidant en France en 2021**



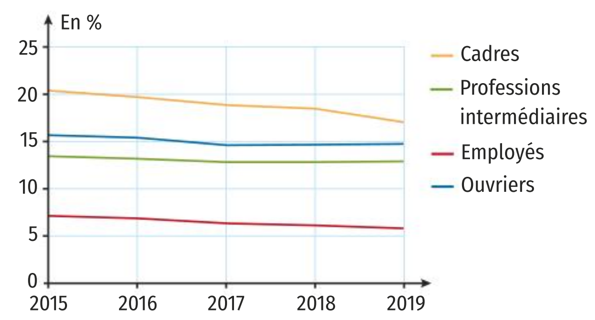
Source : Insee

Doc. 2 **Catégorie socioprofessionnelle parmi les personnes ayant un emploi en France en 2019**



Source : Insee

Doc. 3 **Écarts de salaires en équivalent temps plein entre les femmes et les hommes entre 2015 et 2019**



Source : Insee

Questions

1 À l'aide des documents, justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. Plus d'un quart des femmes de 25 à 64 ans en France ont un niveau Bac +3 ou plus.

b. Deux tiers des hommes ont au minimum un niveau Bac ou équivalent.

c. Il y a environ autant d'hommes que de femmes qui sont sans diplôme ou avec le brevet des collèges.

2 En 2019, combien y avait-il de femmes et d'hommes employés de professions intermédiaires ?

3 De quelle façon les inégalités salariales entre les femmes et les hommes évoluent-elles en fonction des catégories socioprofessionnelles ?

Bilan

Lorsque l'on analyse des données, dans quel but est-il préférable d'utiliser un diagramme circulaire ? Un diagramme en bâtons ? Une courbe ?

B Inégalités sociales dans l'enseignement scolaire

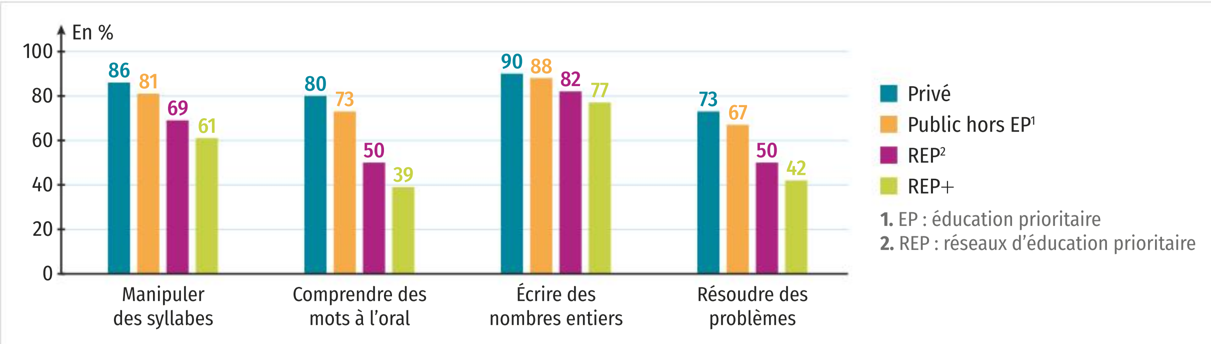
Fil rouge

Objectif Lire, comprendre et interpréter des graphiques pour analyser une situation.

Les documents ci-dessous regroupent plusieurs données de l'Insee qui mettent en évidence les inégalités sociales dans l'enseignement scolaire.

Pour simplifier, on dira que l'enseignement scolaire est parfaitement égalitaire lorsque les taux de réussite des élèves sont les mêmes dans tous les domaines, indépendamment du milieu social de l'élève.

Doc. 1 **Proportion d'élèves présentant une maîtrise satisfaisante de différentes compétences en début de CP en septembre 2020**



Doc. 2 **Diplôme le plus élevé obtenu selon le diplôme des parents et l'origine sociale en 2014-2015**

	Diplôme le plus élevé des parents		
	Parents peu ou pas diplômés	**Au moins un parent diplômé du secondaire**	**Au moins un parent diplômé du supérieur**
Aucun diplôme, brevet des collèges	23,9	8,2	3,8
CAP, BEP, équivalent	27,0	21,0	5,4
BAC	21,7	25,9	12,7
BAC +2	14,6	22,0	20,3
BAC +3 ou +4	8,0	12,9	23,7
BAC +5 ou plus	4,8	10,0	34,1

En pourcentage parmi les personnes de 25-44 ans.

Doc. 3 **Proportion d'élèves du second degré enfants d'ouvriers et d'inactifs à la rentrée 2020**

	Secteur de l'établissement	
	Public	**Privé**
Collège[1]	40,7	17,1
Lycée général et technologique	29,9	11,0
Lycée professionnel	57,0	32,5

1. Y compris les élèves scolarisés en lycée (notamment des troisièmes prépa-métiers).

Doc. 4 **Épreuves Pisa - Définitions**

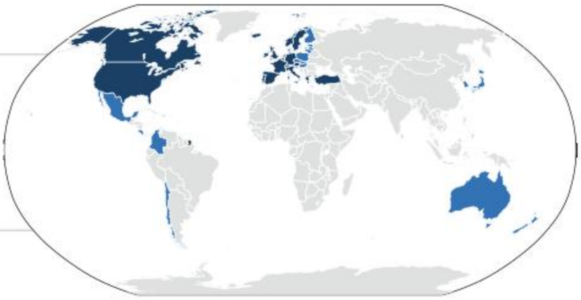
Le statut économique, social et culturel (SESC) est défini dans le Programme international pour le suivi des acquis des élèves (Pisa) à partir d'un indice synthétisant le niveau de diplôme des parents, leurs professions, ainsi que les ressources financières et culturelles du foyer. Les élèves issus d'un milieu social défavorisé sont ceux dont l'indice appartient au quart le plus faible, ceux de milieu social favorisé appartiennent au quart le plus élevé.

Doc. 5 **Score moyen des élèves de 15 ans à l'épreuve Pisa de compréhension de l'écrit selon le statut économique, social et culturel en 2018**

Milieu social		Finlande	Suède	Royaume-Uni	Allemagne	Belgique	France	OCDE	Pays-Bas	Italie
	Défavorisé	483	460	471	450	440	443	445	448	436
	Favorisé	562	549	550	564	550	550	534	536	511
	Ensemble	520	506	504	498	493	493	487	485	476

Doc. 6 **OCDE**

L'OCDE est l'Organisation de coordination et de développement économiques qui compte 38 pays membres en 2021. Elle publie régulièrement des résultats statistiques et des études économiques et sociales comparant les différents pays membres.



■ Pays membres fondateurs de l'OCDE
■ Autres pays membres de l'OCDE

Questions

1. D'après le **doc. 1**, entre les élèves de REP+ et ceux de l'enseignement privé, l'écart atteint 25 **points de pourcentage** pour la manipulation des syllabes en français.
Expliquer ce que signifie l'unité « points de pourcentage ».

2. Pour quelle compétence évaluée en début de CP l'écart en points de pourcentage est-il le plus élevé entre les élèves de REP+ et ceux de l'enseignement privé ?

3. Serait-il pertinent de regrouper les élèves en uniquement deux catégories : ceux issus d'une école privée ou publique hors EP d'une part et ceux issus d'une école REP et REP+ d'autre part ? Justifier.

4. Comment synthétiser en une phrase le niveau d'études atteint par une personne âgée de 25-44 ans en fonction du niveau d'études des parents ?

5. En analysant les **doc. 1 et 3**, comment peut-on expliquer les résultats relevés dans le **doc. 2** ?

6. **a.** Donner trois pays dont le score des élèves en milieu favorisé est égal ou très proche de celui de la France.

   b. Pour ces trois pays, comparer les écarts entre les scores des élèves en milieu favorisé et les scores des élèves en milieu non favorisé. Où se situe la France en comparaison de ces pays ?

   c. Comparer les scores de la France avec ceux de l'OCDE.

Bilan

À partir de l'ensemble des documents, peut-on dire que la France lutte efficacement contre les inégalités sociales dans l'enseignement scolaire ? Justifier.

1 Tableaux croisés d'effectifs

Définition

Un **tableau croisé d'effectifs**, aussi appelé **tableau à double entrée**, est un tableau donnant conjointement en lignes et en colonnes les effectifs des différentes valeurs de deux caractères d'une même population.

Remarque On complète un tableau croisé avec des effectifs donnés ou calculés à partir de l'énoncé.

Exemple 1

Un restaurant dresse un tableau croisé d'effectifs en fonction des plats commandés par ses clients.

31 personnes ont commandé du poisson avec des légumes.

	Poisson	Viande	Total
Frites	10	22	32
Légumes	31	17	48
Total	41	39	80

32 personnes ont commandé des frites.

Au total, le restaurant a servi 80 clients.

Exemple 2

Le jour suivant, sur les **200** clients interrogés, **60 %** ont commandé des frites et **45 %** du poisson. Parmi les plats servis avec des frites, **deux tiers** des plats contenaient de la viande car $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$.

	Poisson	Viande	Total
Frites	40	**80**	**120**
Légumes	50	30	80
Total	**90**	110	**200**

2 Représentation graphique des données statistiques

A Diagrammes en bâtons

Définition

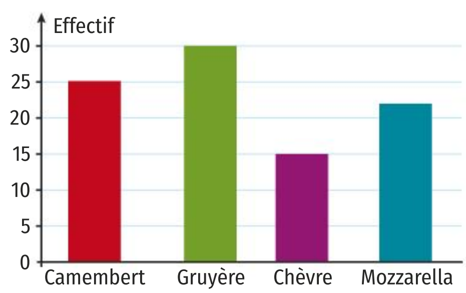
Un **diagramme en bâtons** ou **en barres** est un graphique représentant les effectifs ou les fréquences des différentes valeurs prises par un ou plusieurs caractères.

Les valeurs du (ou des) caractère(s) sont placées en abscisses et les hauteurs des bâtons ou des barres sont proportionnelles aux effectifs et aux fréquences qui leur correspondent.

Exemple

Un supermarché a effectué un sondage auprès de ses clients à propos du type de fromage qu'ils consomment le plus. Les résultats du sondage sont donnés dans le tableau ci-dessous et représentés par le diagramme en bâtons ci-contre.

Fromage	Camembert	Gruyère	Chèvre	Mozzarella
Effectif	25	30	15	22



B Diagrammes circulaires

Définitions

Un **diagramme circulaire** est un disque partagé en secteurs angulaires représentant chacun une valeur du caractère étudié. Les mesures des secteurs angulaires sont proportionnelles aux effectifs des différentes valeurs. La somme totale des mesures des secteurs angulaires est donc égale à 360°.

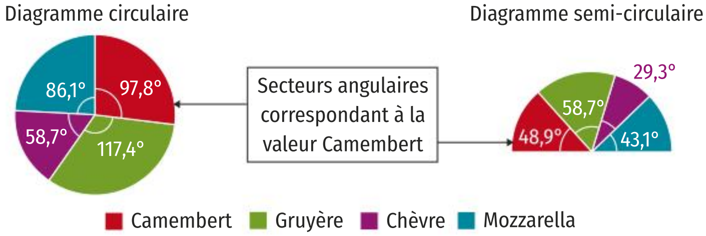
Un **diagramme semi-circulaire** représente les données de la même façon mais sur un demi-disque.
La somme totale des mesures des secteurs angulaires est donc égale à 180°.

Exemple

À partir du tableau d'effectifs de l'exemple précédent, on réalise les diagrammes circulaire et semi-circulaire ci-contre.

Par exemple, il y a 25 personnes qui préfèrent le camembert sur un total de 92.

On calcule donc $\dfrac{25 \times 360}{92} \approx 97{,}8$.



C Nuages de points

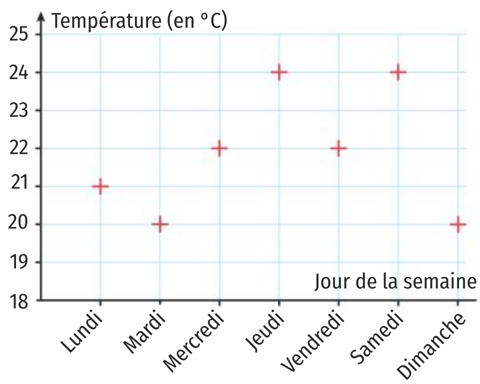
Définition

Étant donnés deux caractères d'une série statistique, le **nuage de points** associé est, dans un repère, l'ensemble des points ayant pour abscisses les valeurs du premier caractère et pour ordonnées les valeurs du second.

Exemple 1

Le nuage de points ci-contre représente les températures moyennes, en degré Celsius, à Versailles au cours d'une semaine.

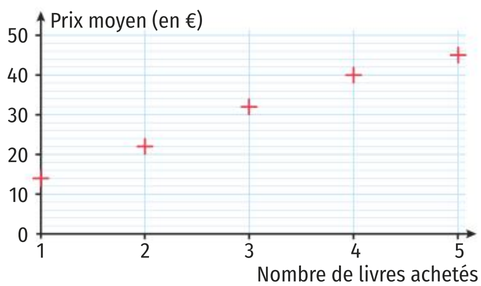
Sur le graphique, on peut lire que le mercredi et le vendredi, il a fait 22 °C en moyenne et que le seul jour où il a fait 21 °C en moyenne était le lundi.



Exemple 2

Une librairie a dressé le tableau de la moyenne des prix payés par ses clients, en euro, en fonction du nombre de livres achetés.

Nombre de livres achetés	1	2	3	4	5
Prix moyen (en €)	14	22	32	40	45



Méthode 1 Compléter et exploiter un tableau croisé d'effectifs

Dans son gîte, Marguerite accueille des vacanciers de nationalité française mais aussi de nationalité étrangère.

Depuis l'ouverture de son activité, elle a reçu 600 personnes, dont un tiers était de nationalité étrangère.

S'ils le souhaitent, les vacanciers peuvent souscrire à l'option petit-déjeuner. Parmi les vacanciers français, 10 % ont choisi cette option, tout comme 90 vacanciers étrangers.

Dresser un tableau croisé d'effectifs correspondant à la situation.

Solution

Depuis l'ouverture, le gîte a accueilli $\frac{1}{3} \times 600 = 200$ vacanciers étrangers. $600 - 200 = 400$ vacanciers étaient de nationalité française.

Le nombre de vacanciers français ayant commandé un petit déjeuner est donc de $\frac{10}{100} \times 400 = 40$. Le nombre total de petits déjeuners était de $40 + 90 = 130$.

On complète la colonne restante par soustraction.

	Avec petit déjeuner	Sans petit déjeuner	Total
Nationalité française	40	360	400
Nationalité étrangère	90	110	200
Total	130	470	600

Méthode

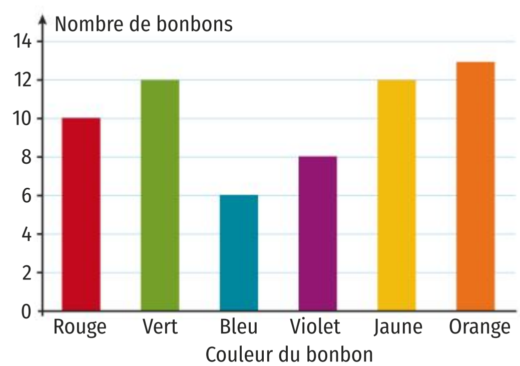
- On écrit les données de l'énoncé dans les cases adaptées du tableau.
- On calcule des valeurs manquantes à l'aide des données de l'énoncé et on les place dans le tableau.
- On complète le tableau en faisant des additions ou des soustractions sur une ligne ou une colonne.

Méthode 2 Tracer et utiliser un diagramme en bâtons

Dans un sachet de bonbons, dix sont rouges, douze sont verts, six sont bleus, huit sont violets, douze sont jaunes et enfin treize sont orange. Représenter la répartition des couleurs des bonbons à l'aide d'un diagramme en bâtons.

Solution

En abscisse on écrit les différentes couleurs et en ordonnée les effectifs.



Méthode

- On trace et légende deux axes gradués.
- On représente les caractéristiques étudiées sur l'axe des abscisses et les effectifs associés sur l'axe des ordonnées.
- Pour chacune des couleurs, on trace une barre de manière que sa hauteur corresponde au nombre de bonbons de cette couleur.

Attention : les bâtons doivent être de même largeur et ne doivent pas se toucher !

Méthode 1

À l'oral

4 Le service d'intendance d'un collège donne les informations suivantes.

	Filles	Garçons	Total
Demi-pensionnaires	210		350
Externes	90	100	190
Total		240	540

1. Combien compte-t-on d'élèves qui ne mangent pas à la cantine (élèves externes) ?
2. Combien y a-t-il de garçons demi-pensionnaires ?
3. Combien y a-t-il de filles dans l'établissement ?
4. Quelle est la proportion de filles demi-pensionnaires parmi l'ensemble des élèves ?
5. Quelle est la proportion de garçons parmi les externes ?

5 À l'occasion de la sortie du dernier film de la trilogie Jurassic World en juin 2022, le cinéma de Maurepas interroge tous ses clients. 450 clients ont vu les deux premiers films, contre 200 clients qui n'ont vu aucun des deux.
50 clients ont vu juste le premier volet et 300 ont vu juste le deuxième.

1. Recopier et compléter le tableau croisé suivant :

	Volet 1 vu	Volet 1 non vu	Total
Volet 2 vu			
Volet 2 non vu			
Total			

2. Combien de clients ont vu le volet 1 de la saga ?
3. Sur combien de personnes a porté le sondage ?

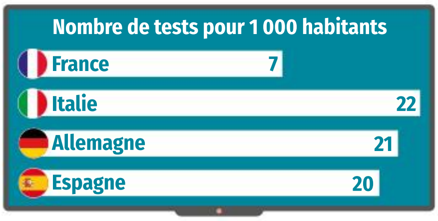
6 Un refuge de la SPA qui a ouvert en début d'année a accueilli 60 chiens et 50 chats. La moitié des chats a été adoptée contre un tiers des chiens.

1. Dresser le tableau croisé d'effectifs correspondant à la situation et présentant les différents animaux en colonne et les adoptions ou non en ligne.
2. Combien d'animaux reste-t-il à adopter ?

Méthode 2

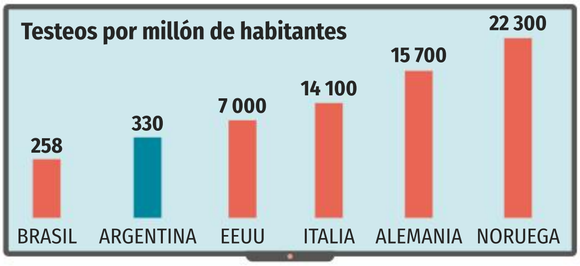
À l'oral

7 Le 19 avril 2020, France 2 a diffusé un diagramme en barres horizontal présentant le nombre de tests de dépistage du COVID-19 pour 1000 habitants pour quatre pays européens.



Ce graphique respecte-t-il les règles de proportionnalité ? Justifier.

8 En Argentine, en avril 2020, la chaîne de télévision C5N a présenté ce diagramme illustrant le nombre de tests COVID-19 par million d'habitants.



Que penser de ce graphique ?

9 La composition globale des déchets marins est donnée dans le tableau ci-dessous.

Type	Plastique	Bois	Métal	Autre
Pourcentage	70 %	3,5 %	3 %	23,5 %

Représenter ces données sous la forme d'un diagramme en barres.

10 Voici la répartition des blessés sur les routes en France en 2020 en fonction du type de route.

Type de route	Nombre de blessés
Autoroutes	6 000
Routes nationales	3 000
Routes départementales	27 200
Autres routes	19 700

Représenter ces données sous la forme d'un diagramme en barres.

Méthode 3 Tracer et exploiter un diagramme circulaire

Dans sa métallerie, Jérémy reçoit différents types de métaux dont il se sert pour créer des pièces pour l'industrie automobile.

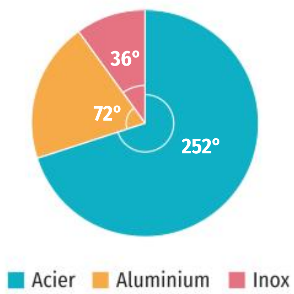
Au courant du mois de mai 2022, il a reçu un total de 28 tonnes de métal : 19,6 tonnes d'acier, 5,6 tonnes d'aluminium et le reste d'inox.

Tracer le diagramme circulaire correspondant à la répartition des différents métaux.

Solution

On réalise le tableau de proportionnalité suivant.

Métal	Masse (en tonne)	Mesure d'angle
Acier	19,6	252 °
Aluminium	5,6	72 °
Inox	2,8	36 °
Total	28	360 °



Par exemple, pour obtenir l'angle correspondant à l'acier, on calcule :

$$\frac{19{,}6 \times 360}{28} = 252.$$

Méthode

On calcule l'angle correspondant à chaque fréquence en multipliant la fréquence par 360 si le diagramme est circulaire et par 180 si le diagramme est semi-circulaire.

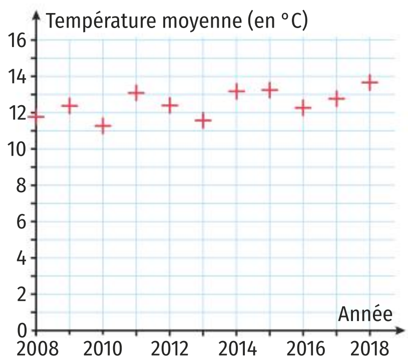
Méthode 4 Tracer et exploiter un nuage de points

On a relevé les températures moyennes, en degré Celsius, à Mâcon entre les années 2008 et 2018, et les résultats ont été rassemblés dans le tableau suivant.

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Température moyenne (en °C)	11,8	12,4	11,3	13,1	12,4	11,6	13,2	13,3	12,3	12,8	13,7

Tracer le nuage de points correspondant à l'évolution de la température.

Solution



Méthode

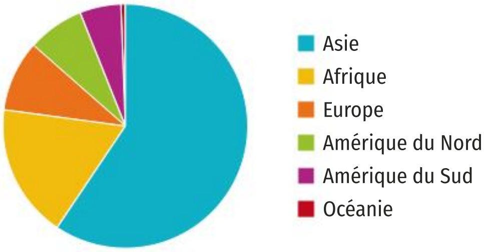
- On légende les axes du graphique : en abscisse, les années et en ordonnée, les températures.
- On place les points de coordonnées (année ; température) : chaque température est placée au bon endroit sur le graphique en fonction de l'année qu'elle représente.

Attention : on construit un nuage de points. Il ne faut donc pas relier les points !

Méthode 3

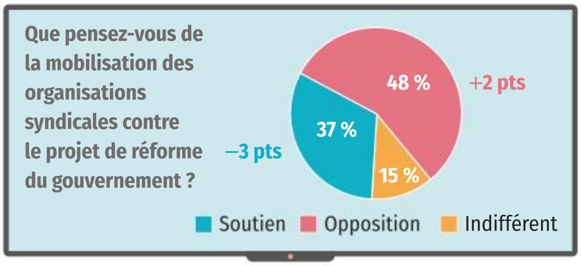
À l'oral

11 Le diagramme ci-dessous montre la répartition de la population mondiale au 1er juillet 2022.



1. Quel continent regroupe plus de la moitié de la population mondiale ?
2. La population est-elle plus importante en Europe ou en Amérique du Nord ?

12 Le 25 mars 2018, dans son reportage sur la grève des cheminots, BFMTV a affiché le diagramme circulaire suivant.



1. Pourquoi ce diagramme est-il incorrect ?
2. Construire le diagramme circulaire correctement.

13 En France, 30 % du territoire est occupé par des forêts, 4 % par des landes et 57 % par des terres agricoles. Le reste du territoire est sans végétation et correspond aux routes, aux bâtiments, aux rochers et aux glaciers.

Représenter ces données sous la forme d'un diagramme semi-circulaire.

14 Voici la répartition des groupes sanguins en France.

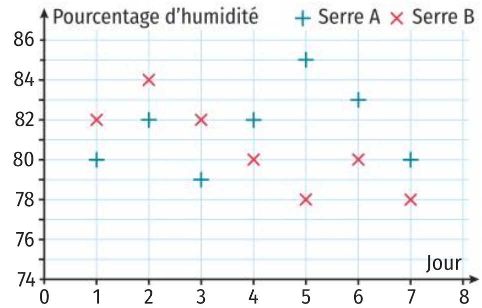
Groupe	O	A	B	AB
Fréquence	42 %	44 %	10 %	4 %

Représenter ces données sous la forme d'un diagramme circulaire.

Méthode 4

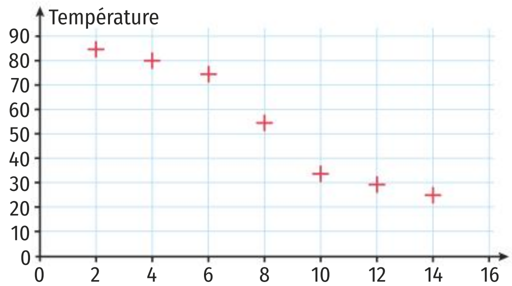
À l'oral

15 En relevant le pourcentage d'humidité dans deux serres tropicales A et B pendant sept jours consécutifs, on obtient les nuages de points suivants.



Comparer les taux d'humidité de ces deux serres.

16 Dans une feuille de calcul, on a tracé le nuage de points ci-dessous.



Quelles informations manque-t-il pour pouvoir interpréter les données ?

17 Sur son carnet de santé, Juliette lit les informations suivantes.

Âge (en mois)	0	1	2	3	4	5	6
Masse (en kg)	3	4,6	6,2	7	6,8	7,5	8,1
Taille (en cm)	52	56	60	61	64	66	68

1. Tracer le nuage de points de sa taille en fonction de sa masse.
2. Que dire de l'évolution de sa taille par rapport à sa masse ?

1 Tableaux croisés

18

On donne ci-dessous les résultats du baccalauréat 2021 en France métropolitaine.

	Présents	Admis
Baccalauréat général	385 959	379 930
Baccalauréat technologique	154 303	147 596
Baccalauréat professionnel	205 601	186 395

1. Combien compte-t-on de bacheliers en 2021 ?
2. Calculer le taux global de réussite, en pourcentage, arrondi au centième.
3. Calculer le taux de réussite au baccalauréat général, en pourcentage, arrondi au centième.
4. Parmi les 5 286 candidats de la filière STAV, environ 98,66 % ont été admis. Combien y a-t-il eu de nouveaux bacheliers dans cette filière ?

19 Environnement

Dans son rapport *Mitigation of Climate Change* d'avril 2022, le GIEC (Groupe intergouvernemental sur l'évolution du climat) donne le tableau suivant, présentant la répartition des émissions de gaz à effet de serre (GES) par zone géographique en 2019.

	Population (en million)	Émission de GES
Afrique	1 292	9 %
Amérique latine et Caraïbes	646	10 %
Amérique du Nord	366	12 %
Asie de l'Est	1 471	27 %
Asie du Sud	1 836	8 %
Asie du Sud-Est et Pacifique	674	9 %
Australie, Japon, Nouvelle-Zélande	157	3 %
Europe	620	8 %
Europe de l'Est, Asie centrale et de l'Ouest	291	6 %
Moyen-Orient	252	5 %
Commerce international et aviation	–	3 %

1. Quelle est la zone ayant émis le plus de GES en 2019 ? Celle en ayant émis le moins ?
2. **a.** Quelle proportion de la population mondiale regroupe l'Asie de l'Est ? L'Asie du Sud ?

b. Commenter le résultat précédent en le comparant au pourcentage d'émission de GES.

3. Le GIEC estime à 59 Gt la quantité de GES émis en 2019. Calculer la quantité de gaz émis par zone.

> **Aide**
> $1\text{ Gt} = 10^9$ t : une gigatonne vaut un milliard de tonnes.

4. Calculer la quantité de GES, en tonne, émis par habitant. Quelle est la zone émettant le plus de GES par habitant ? Quelle est celle en émettant le moins ?

20

On s'intéresse à l'espérance de vie des Français à la naissance au cours de la dernière décennie.

	2010	2020
Espérance de vie à la naissance des femmes	84,6	85,1
Espérance de vie à la naissance des hommes	78,0	79,1
Espérance de vie en bonne santé des femmes	63,3	65,9
Espérance de vie en bonne santé des hommes	61,8	64,4

Source : Insee

1. **a.** Quelle est la différence entre l'espérance de vie à la naissance et l'espérance de vie en bonne santé ?

b. Pourquoi l'espérance de vie à la naissance est-elle supérieure à l'espérance de vie en bonne santé ?

2. Comment expliquer l'écart entre les espérances de vie à la naissance des hommes et des femmes en 2020 ?
3. Pourquoi cet écart est-il réduit pour l'espérance de vie en bonne santé ?
4. **a.** Calculer les taux d'évolution, entre 2010 et 2020, de l'espérance de vie à la naissance des hommes et des femmes.

> **Aide**
> Le taux d'évolution entre deux valeurs v_1 et v_2 est donné par la formule $t = \frac{v_2 - v_1}{v_1}$ avec $v_1 \neq 0$.

b. Calculer les taux d'évolution, entre 2010 et 2020, de l'espérance de vie en bonne santé des hommes et des femmes.

c. Comment expliquer l'écart entre les taux d'évolution de l'espérance de vie à la naissance et l'espérance de vie en bonne santé ?

21 Exercice inversé

À partir de données statistiques recueillies auprès de la classe (taille des élèves, âge, etc.), inventer un exercice pour lequel il faudra compléter un tableau croisé d'effectifs permettant de comparer deux caractères.

22 Fil rouge

Le tableau ci-dessous regroupe les seuils de niveau de vie annuels, en euro 2019 constant. Cela signifie que les données correspondent à la valeur de l'euro en 2019. Les valeurs des autres années sont des valeurs corrigées en prenant en compte l'inflation.

	2016	2017	2018	2019
1er décile D1	11 480	11 530	11 340	11 660
Médiane	21 350	21 440	21 490	22 040
9e décile D9	39 080	39 350	39 560	39 930

Source : Insee

Le 1er décile représente les 10 % de la population les plus pauvres alors que le 9e décile représente les 10 % de la population les plus riches.

1. Calculer et interpréter le taux d'évolution des seuils de niveau de vie entre 2016 et 2019 pour chaque catégorie. Arrondir à 0,1 % près.
2. Pour chaque année, calculer et interpréter $\frac{D9}{D1}$. Arrondir les résultats au centième près.

23

À l'université, les étudiants qui suivent l'option sport doivent choisir un sport collectif pendant un semestre et un sport individuel pendant le second semestre. Les sports collectifs proposés sont le basket-ball, le football et le rugby. Les sports individuels proposés sont la musculation, la natation et le badminton. L'administration de l'université relève l'effectif d'étudiants ayant participé à chaque sport et obtient le tableau suivant.

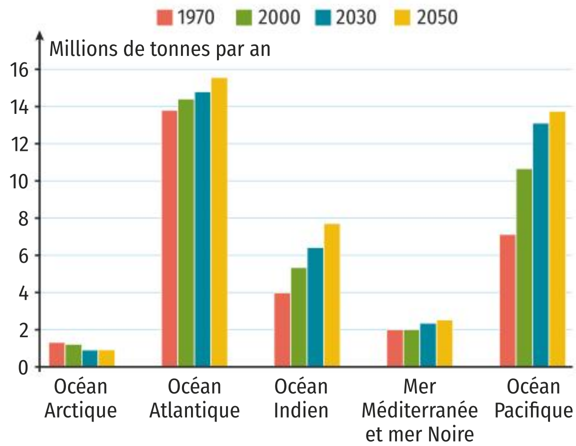
	Basket-ball	Football	Rugby
Musculation	55	250	100
Natation	110	150	40
Badminton	190	100	10

1. Combien d'étudiants ont fait du football et de la natation ?
2. Combien d'étudiants ont fait du badminton ?
3. Combien d'étudiants ont choisi l'option sport ?

2 Représentations graphiques

24 Environnement

Dans son rapport *Croissance bleue* datant de 2015, la WWF (World Wildlife Fund) a relevé, en 1970 et en 2000, les apports d'azote polluant les eaux avant d'émettre une hypothèse sur l'évolution de ces apports en 2030 et en 2050.

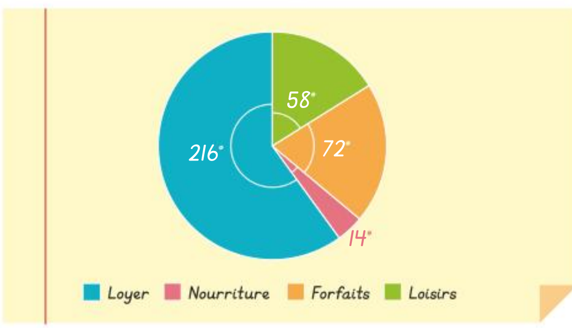


1. Utiliser le diagramme en barres précédent pour dresser un bilan de la présence d'azote dans les divers endroits du globe.
2. À quelles évolutions peut-on s'attendre sur les différents océans et mers de la planète ?

25 Copie d'élève

Edgar a tracé le diagramme circulaire correspondant à son budget mensuel.

Catégories	Dépenses
Loyer	750 €
Nourriture	250 €
Forfaits	50 €
Loisirs	200 €
Autres	600 €



Identifier ses erreurs et proposer une correction.

26

Le tableau ci-dessous représente le pourcentage de différents usages d'Internet selon la tranche d'âge entre 2017 et 2021.

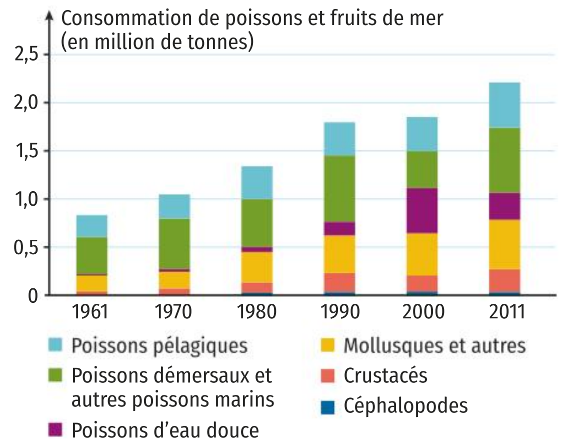
Tranche d'âge	16-24 ans	25-64 ans	65-74 ans
Journaux	63	61	41
Jeux en ligne ou téléchargés	53	28	13
Radios en ligne, musique en streaming	82	51	18
Vidéos ou télévision sur Internet	89	55	25
Voyages et hébergement	41	46	30

Représenter les données du tableau à l'aide d'un diagramme en barres.

27 *Environnement*

Dans le rapport de la WWF (World Wildlife Fund) *Nourrir l'humanité à l'horizon 2050* datant de 2017, on trouve le diagramme en barres ci-dessous présentant la consommation de poissons et fruits de mer en France en million de tonnes.

En 2011, un Français consommait en moyenne 34,8 kg de poissons ou fruits de mer par an.



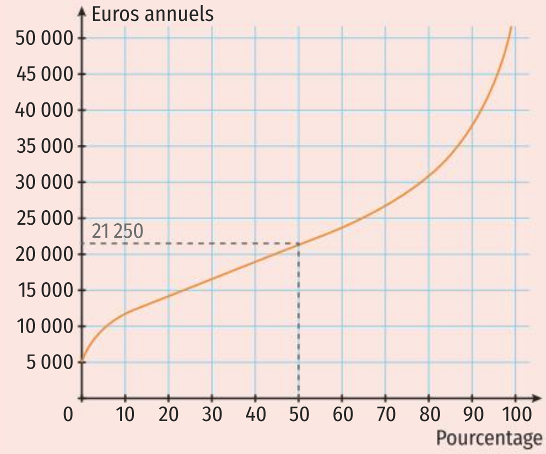
1. Que dire de la consommation générale de poissons en France entre 1961 et 2011 ?

2. a. En utilisant une règle pour mesurer les hauteurs sur le graphique, calculer les quantités de chaque type de poissons consommé en France en 2011.

b. Représenter la consommation de poissons en 2011 sur un diagramme circulaire puis rédiger deux phrases en lien avec ce graphique.

28 *Fil rouge*

La courbe ci-dessous donne la répartition des niveaux de vie des individus en 2018 en France.



Par exemple, 50 % des personnes avaient un niveau de vie annuel inférieur ou égal à 21 250 € en 2018.

1. Quel pourcentage approximatif de la population avait un niveau de vie inférieur ou égal à 15 000 € en 2018 ?

2. Quel pourcentage approximatif de la population avait un niveau de vie supérieur ou égal à 31 000 € en 2018 ?

29 *Environnement*

Dans son rapport *Stoppons le torrent de plastique !* datant de 2019, la WWF (World Wildlife Fund) écrit que sur les 4,5 Mt de déchets plastiques générés par la France en 2016, il n'en a été collecté que 98 %. Sur tous les déchets collectés, 41 % sont incinérés, 37 % enfouis et 22 % recyclés.

Aide

1 Mt $= 10^6$ t : une mégatonne vaut un million de tonnes.

1. Calculer la masse des déchets plastiques non collectés, exprimée en tonne.

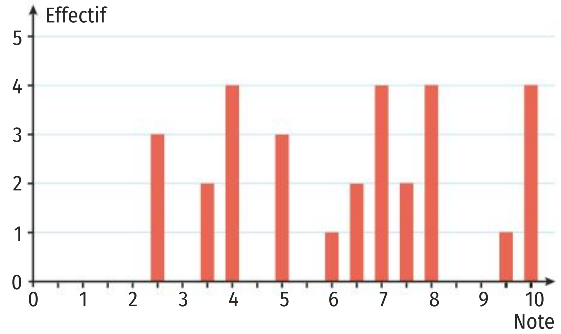
2. Calculer la masse, en tonne, des déchets plastiques incinérés, enfouis et recyclés.

3. En 2019, la population française s'élevait à environ 67 millions de personnes. Calculer la masse moyenne, exprimée en kilogramme, de déchets plastiques générée par une personne en 2016.

4. À l'aide d'un tableur, représenter par un diagramme circulaire la répartition des déchets (non collectés, recyclés, incinérés et enfouis).

30 Tableur

Mme Mendez a regroupé les résultats des élèves de seconde A dans le diagramme en barres suivant.



1. Combien y a-t-il d'élèves en seconde A ?

2. Combien d'élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 5 ?

3. Combien d'élèves ont obtenu une note entre 6 et 8 inclus ?

4. Calculer la moyenne de la classe à ce devoir.

5. Utiliser une feuille de calcul pour dresser un tableau présentant le nombre d'élèves dont les compétences sont :

- non acquises (note inférieure ou égale à 2,5) ;
- en voie d'acquisition (note supérieure strictement à 2,5 et inférieure ou égale à 5) ;
- acquises (note supérieure strictement à 5 et inférieure ou égale à 7,5) ;
- bien acquises (note strictement supérieure à 7,5).

6. Utiliser la feuille de calcul pour tracer le diagramme circulaire correspondant au tableau.

31

Un technicien d'analyses biomédicales a regroupé dans une feuille de calcul la concentration en glucose dans le sang de ses patients. Un individu en bonne santé doit avoir un résultat compris entre 0,70 g/L et 1,26 g/L. En dessous de cet intervalle, on parle d'hypoglycémie et au-dessus, d'hyperglycémie.

	A	B
1	**Concentration en glucose (g/L)**	**Résultat**
2	1,27	
3	0,77	
4	1,05	
5	0,46	
6	1,57	
7	1,39	
8	0,74	
9	0,85	
10	0,54	
11	0,80	

1. a. Compléter la formule suivante, à entrer en **B2** puis à tirer vers le bas, permettant de déterminer si le patient correspondant est malade :
= SI(OU(A2 < … ; A2 > …) ; "Malade" ; "Sain").

b. Compléter la formule suivante, à entrer en **B2** puis à tirer vers le bas, permettant d'obtenir le même résultat qu'à la question précédente :
= SI(ET(A2 > … ; A2 < …) ; "Sain" ; "Malade").

2. Télécharger le fichier sur LLS.fr/EM1Analyses. Compléter le tableau et tracer le diagramme circulaire correspondant à la fréquence de patients malades et celle de patients sains.

Défis !

32 Un institut de sondage interroge des personnes prises au hasard dans la rue pour connaître leur nombre de frères et sœurs.
Réaliser un diagramme circulaire sachant que :

- toutes les personnes ont au maximum trois frères et sœurs ;
- la moitié ont un, deux ou trois frères et sœurs ;
- $\frac{11}{30}$ ont un ou deux frères et sœurs ;
- $\frac{3}{10}$ ont deux ou trois frères et sœurs.

33 Le but de ce défi est de réaliser un sondage en grandeur réelle.

Dans votre lycée, interrogez au minimum 25 % des élèves de l'établissement et demandez-leur le temps qu'il leur faut pour venir au lycée et le moyen de transport le plus souvent utilisé.

Organisez et analysez les données recueillies en s'appuyant notamment sur plusieurs types de graphiques.

Remarque Cette double-page permet d'approfondir les notions de ce chapitre et de travailler de façon différenciée avec les élèves de la classe, notamment avec les plus à l'aise en mathématiques ou bien avec celles et ceux qui souhaiteraient choisir l'option mathématiques complémentaires en terminale.

Cours

Méthode de Mayer pour l'ajustement affine

Définition

Une **droite d'ajustement affine** est une droite passant le plus près possible de tous les points d'un nuage de points. Elle permet d'une part de vérifier s'il existe une relation affine entre les deux variables et, d'autre part, de faire des extrapolations sur des valeurs manquantes du nuage de points.

Méthode

Après avoir classé les points du nuage de points dans l'ordre croissant des abscisses, on les sépare en deux groupes de taille égale (dans le cas où le nombre de points est impair, un groupe aura un point de plus). On détermine le **point moyen** (c'est-à-dire le point dont l'abscisse est la moyenne des valeurs en abscisse et l'ordonnée est la moyenne des valeurs en ordonnée) de chacun des deux groupes et on les place sur le graphique. Pour finir on les relie pour obtenir la **droite d'ajustement de Mayer**.

Exemple

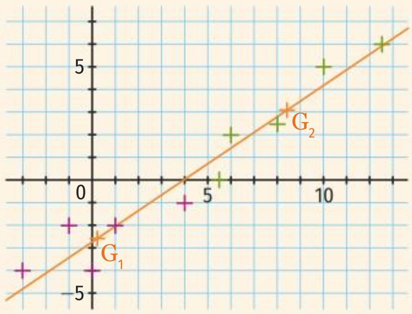
x_i	−3	−1	0	1	4	5,5	6	8	10	12,5
y_i	−4	−2	−4	−2	−1	0	2	2,5	5	6

On sépare la série statistique en deux séries de cinq points.

Le point moyen du premier groupe est $G_1(0{,}2\ ;-2{,}6)$ et celui du second groupe est $G_2(8{,}4\ ;3{,}1)$.

On les place sur le graphique.

La droite (G_1G_2) est la droite de Mayer du nuage de points.



34 Calculer la moyenne de la série statistique suivante : 1 ; 2 ; 5 ; 9 ; 7 ; 5 ; 10 ; 12 ; 8 ; 2 ; 8.

35 Calculer la moyenne de la série statistique suivante.

Valeurs	−2	3	7	8	10
Effectifs	2	1	5	3	7

36 Ce trimestre, Clément a reçu les notes suivantes en mathématiques : 12/20 coefficient 1, 10/20 coefficient 2, 13/20 coefficient 2 et 13/20 coefficient 3. Calculer la moyenne de Clément en mathématiques.

37 Déterminer le point moyen du nuage de points de la série statistique suivante.

x_i	−4	−1	0	5	8	9
y_i	3	1	6	2	5	4

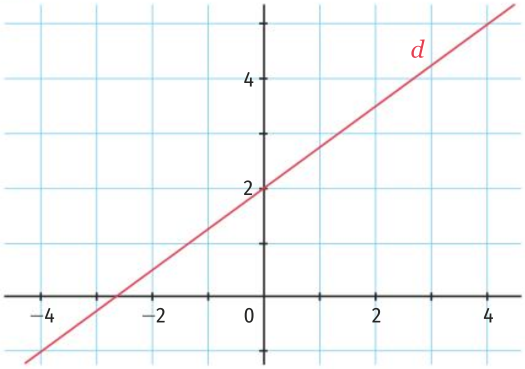
38 On considère la droite d passant par les points $A(-3\ ;8)$ et $B(9\ ;0)$.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite d.

2. Le point $C(3\ ;4)$ appartient-il à d ?

3. Soit E le point de d d'abscisse 0. Calculer son ordonnée.

39 On considère la droite d suivante.



1. Quelle est l'ordonnée du point de la droite d d'abscisse -4 ?

2. Quelle est l'abscisse du point sur la droite d d'ordonnée 5 ?

3. Quelle est l'équation réduite de la droite d ?

40 On considère la série statistique suivante.

x_i	0	2	3	6	8	10
y_i	−2	−1	2	4	5	7

1. Tracer le nuage de points associé.

2. On sépare la série en deux groupes de taille égale. Déterminer les points moyens des deux groupes.

3. Placer les points moyens de chaque groupe sur le graphique et tracer la droite de Mayer.

41 On considère la série statistique suivante.

x_i	−5	−2	0	4	7,5
y_i	10,5	8	7	3	0,5

1. Tracer le nuage de points associé.

2. On sépare la série en deux groupes : le premier contenant trois points et le second contenant les deux autres. Déterminer les points moyens des deux groupes.

3. Placer les points moyens sur le graphique et tracer la droite de Mayer.

42 Voici le nombre d'entrées faites par un musée pendant les six premiers mois de l'année.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	820	720	875	834	919	986

1. Tracer le nuage de points de la série.

2. Tracer la droite de Mayer associée à cette série.

3. À l'aide de ce modèle et par lecture graphique, estimer le nombre d'entrées le septième jour.

43 Voici le tableau présentant le chiffre d'affaires, en millier d'euros, réalisé par une entreprise.

x_i	2010	2012	2014	2016	2018	2020
y_i	10	12	15	14	16	18

1. Tracer le nuage de points de la série et la droite de Mayer associée à cette série.

2. À l'aide de ce modèle et par lecture graphique, estimer le chiffre d'affaires prévisible pour 2025.

3. À partir de quelle année le chiffre d'affaires devrait-il dépasser les 25 milliers d'euros ?

4. Déterminer l'équation réduite de la droite de Mayer.

5. Retrouver les résultats des questions **2** et **3** par un calcul.

44 Le tableau ci-dessous donne l'évolution du prix moyen, en euro, d'un litre de sans-plomb 98 en France au 1er jour de certains mois.

Mois	**mars 2020**	**juin 2020**	**sept. 2020**	**déc. 2020**
Prix	1,566	1,344	1,421	1,426
Mois	**mars 2021**	**juin 2021**	**sept. 2021**	**déc. 2021**
Prix	1,563	1,606	1,658	1,724

Source : carbu.com

1. On attribue les abscisses 1 à 8 aux huit mois indiqués dans l'ordre chronologique.

a. Déterminer l'équation réduite de la droite de Mayer associée à cette série statistique.

b. À partir de la droite de Mayer, calculer le prix moyen en mars 2022 et en juin 2022.

2. Suite au début du conflit en Ukraine, le prix de l'essence a augmenté plus fortement que prévu.

Le prix moyen était de 1,913 € en mars 2022 et 2,133 € en juin 2022. Pour chacun de ces deux mois, calculer le taux d'évolution du prix par rapport à la prévision.

45 Voici le tableau présentant le chiffre d'affaires, en millier d'euros, réalisé par une entreprise.

x_i	2012	2014	2016	2018	2020
y_i	7	5	8	6	9

1. Quel est le chiffre d'affaires minimal en 2022 de façon que la droite de Mayer associée à la série statistique ait une pente positive ?

2. Quel est le chiffre d'affaires maximal en 2022 pour que la droite de Mayer ait une pente négative ?

Activité bilan

Élection présidentielle française de 2022

Doc. 1 **Résultats obtenus lors du premier tour de l'élection présidentielle française du 10/04/2022**

Nom du parti	Nombre de voix
Debout la France !	725 176
La France insoumise (LFI)	7 712 520
La République en marche ! (LREM)	9 783 058
Le Rassemblement national (RN)	8 133 828
Les Républicains (LR)	1 679 001
Lutte ouvrière (LO)	197 094
Nouveau Parti anticapitaliste (NPA)	268 904
Parti communiste français (PCF)	802 422
Europe Écologie - Les Verts (EELV)	1 627 853
Parti socialiste (PS)	616 478
Reconquête !	2 485 226
Résistons !	1 101 387

Résultat	Effectif
Bulletins nuls	247 151
Bulletins blancs	543 609
Bulletins exprimés	35 132 947
Abstention	12 824 169

Source : ministère de l'Intérieur

Doc. 2 **Résultats obtenus lors du second tour de l'élection présidentielle française du 24/04/2022**

Nom du parti	Nombre de voix
La République en marche ! (LREM)	18 768 639
Le Rassemblement national (RN)	13 288 686

Source : ministère de l'Intérieur

Résultat	Effectif
Bulletins nuls	805 249
Bulletins blancs	2 233 904
Bulletins exprimés	32 057 325
Abstention	13 655 861

Questions

1. Expliquer à quoi correspondent les différentes catégories de bulletins obtenus dans la colonne « Résultat ».

Répondre aux questions suivantes pour les deux tours de la présidentielle.

2. Calculer le nombre d'inscrits sur les listes électorales lors de l'élection présidentielle de 2022.
3. À l'aide d'une feuille de calcul, dresser le diagramme en barres du nombre de voix obtenues par chacun des partis.
4. À l'aide de la feuille de calcul, dresser les diagrammes circulaires du nombre de voix par parti :
   - par rapport au nombre de votes exprimés ;
   - par rapport au nombre de votants en faisant apparaître également les bulletins blancs ;
   - par rapport au nombre d'inscrits en faisant apparaître également les bulletins blancs, nuls et l'abstention.
5. Commenter la phrase suivante : « M. Emmanuel Macron (LREM) a obtenu la majorité absolue des suffrages exprimés au second tour. »

Fil rouge du chapitre

1 Mesurer pour comprendre

Sujet : L'Insee regroupe des milliers de données statistiques. En quelques clics, on peut obtenir des valeurs et des graphiques qui mettent en évidence certains facteurs d'inégalités dans différents domaines.

Comment mettre en évidence des inégalités par l'analyse d'informations chiffrées ?

Pistes de recherche :

- Décrire le rôle de l'Insee.
- Sur le site de l'Insee, chercher différents types d'inégalités.
- Choisir une inégalité, organiser, représenter et analyser les données la concernant puis justifier si cette inégalité tend à se réduire dans le futur ou, au contraire, à s'accroître.

Fil rouge :

- Activité B p. 30
- Ex. 22 p. 39
- Ex. 28 p. 40

CONSEILS POUR L'ORAL
- Ne pas trop lire ses notes.
- Parler fort et bien articuler.
- Surveiller sa montre pour ne pas dépasser le temps imparti.

2 Le paradoxe de Simpson

Sujet : Le paradoxe de Simpson apparaît généralement dans l'analyse d'un tableau à double entrée : un phénomène observé dans une population peut s'inverser dans l'analyse de petits groupes de cette population.

En s'appuyant sur un exemple détaillé, mettre en évidence le paradoxe de Simpson.


Edward Simpson (1922-2019)

Pistes de recherche :

- Rechercher qui sont Edward Simpson et George Udny Yule.
- Trouver un exemple de tableau croisé qui fait apparaître le paradoxe de Simpson.
- Définir ce qu'on appelle « l'effet de structure » et « le facteur de confusion ».
- Comment se prémunir de ce paradoxe ?

POUR UNE RECHERCHE INTERNET EFFICACE
- Ne pas se limiter à Wikipédia.
- Pour valider une information, confronter plusieurs sources.
- Chercher plusieurs mots-clés autour du thème principal.

Partie

2 Probabilités

Histoire des mathématiques

Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita de Luca Pacioli.

Une histoire des probabilités

C'est à Gerolamo Cardano (1501-1576) que l'on doit la toute première tentative de mathématiser les probabilités, dans son livre *Liber de ludo alea* (1564). Cependant, un des points de départ d'une réflexion scientifique sur les probabilités est le célèbre problème des partis, énoncé pour la première fois en 1494 par Luca Pacioli (1445-1517) dans son encyclopédie mathématique, la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* (voir ci-contre).

150 ans plus tard, **Blaise Pascal** (1623-1662) et **Pierre de Fermat** (1607-1665) échangent sur ce même problème, qui porte alors le nom du problème du chevalier de Méré, afin de lui apporter une solution généralisable. S'inspirant de ces échanges, Christian Huygens (1629-1695) publie en 1657 son *Tractatus de Ratiociniis in Alea Ludo* qui constitue le premier traité mathématique consacré aux probabilités et ouvre la voie à cette nouvelle branche des mathématiques.

Le problème des partis

Blaise Pascal (1623-1662)

Pierre de Fermat (1607-1665)

On peut résumer le problème dont il est question dans les échanges épistolaires entre Pascal et Fermat de la façon suivante : deux joueurs (appelés partis) misent chacun 32 pistoles et participent à un jeu qui se gagne au meilleur des cinq manches. Le gagnant remporte la somme des deux mises soit 64 pistoles. Si le jeu est interrompu avant de pouvoir arriver à sa fin (par exemple sur le score de deux manches à une), comment les joueurs doivent-ils se répartir les gains pour l'équité ?

Ni Pascal ni Fermat ne parlent encore de probabilités mais chacun calculent pourtant ce qui s'apparente à des espérances de gains. Fermat apporte une solution qui se base sur le dénombrement alors que Pascal choisit une solution élégante qui s'appuie sur son triangle arithmétique. Les solutions présentées dans ces échanges épistolaires sont généralisables à d'autres situations.

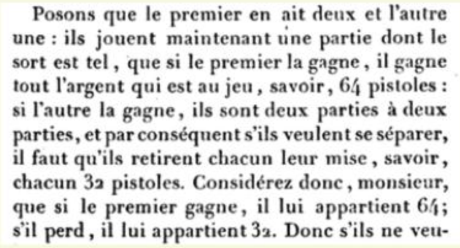
Si on joue chacun 256, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la		6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
	1re Partie.	63	70	80	96	128	256
	2e Partie.	63	70	80	96	128	
	3e Partie.	56	60	64	64		
	4e Partie.	42	40	32			
	5e Partie.	24	16				
	6e Partie.	8					

Réponse apportée par Pascal au problème des partis sur six manches avec une mise de 256 pistoles chacun.

Solution proposée par Pascal

Pascal explique un premier principe : si les deux partis (ayant la même chance de gagner) ont deux victoires chacun, lors de la partie suivante, l'un emportera la mise et l'autre rien. L'espérance du gain est donc $\frac{1}{2} \times 64 + \frac{1}{2} \times 0 = 32$. Puis, il procède à reculons comme on l'illustre avec les arbres suivants.

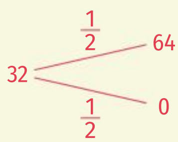


Posons que le premier en ait deux et l'autre une : ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles : si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles. Considérez donc, monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veu-

Extrait de « Œuvres » de Blaise Pascal.

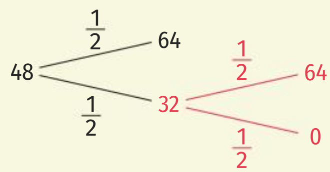
Étape 1

Initialement :
deux victoires partout.



Étape 2

Initialement :
deux victoires pour un joueur,
une victoire pour l'autre.

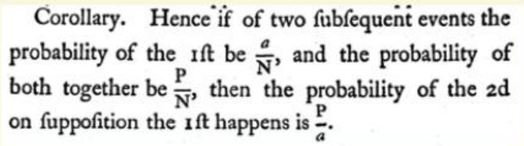


L'espérance de gains lors de cette étape 2 est donc $\frac{1}{2} \times 64 + \frac{1}{2} \times 32 = 48$. Il remonte alors toutes les étapes pour obtenir les espérances de gains à tous les instants où la partie peut s'interrompre.

Probabilités conditionnelles et indépendance

Dans *The Doctrine of Chances* publié à Londres en 1718, Abraham de Moivre (1667-1754) est le premier mathématicien à aborder la notion d'indépendance d'événements. C'est à une œuvre de **Thomas Bayes** (1702-1761), publiée à titre posthume en 1763 par son ami mathématicien Richard Price (1723-1791), que l'on doit la première théorie sur les probabilités conditionnelles : *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*.

Thomas Bayes (1702-1761)



Corollary. Hence if of two ſubſequent events the probability of the 1ſt be $\frac{a}{N}$, and the probability of both together be $\frac{P}{N}$, then the probability of the 2d on ſuppoſition the 1ſt happens is $\frac{P}{a}$.

Extrait de *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances.*

Le corollaire ci-dessus fait partie de la proposition 3 du livre et correspond à la définition que l'on donne aujourd'hui de la probabilité d'un événement B conditionné par un événement A : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ lorsque $P(A) \neq 0$.

2 De la statistique aux probabilités

Objectifs du chapitre :

1. Construire un tableau croisé d'effectifs.
2. Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales.
3. Construire un arbre pondéré.
4. Calculer des probabilités et des probabilités conditionnelles.

Fil rouge du chapitre

Comment mesurer la fiabilité d'un test médical ?

Exercices rituels

1 Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires, toutes indiscernables au toucher. On choisit une boule au hasard dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

2 Parmi les proportions suivantes, lesquelles sont égales ?

a. $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{1}{10}$ **c.** 40 % **d.** $\frac{2}{20}$

3 Dans un jeu classique de 32 cartes, on choisit une carte au hasard. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir un as ?

4 En France, on estime que 51,7 % des habitants sont des femmes. 11,5 % d'entre elles ont au moins 75 ans.

Calculer la proportion de femmes d'au moins 75 ans en France.

5 Parmi les 35 élèves d'une classe, on compte 15 garçons.

Quelle est la fréquence des filles dans cette classe ?

6 Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand : 0,08 ; 9 % ou $\frac{1}{10}$?

D'autres exercices rituels p. 10 ou sur LLS.fr/EM1Rituels

A Efficacité d'un vaccin

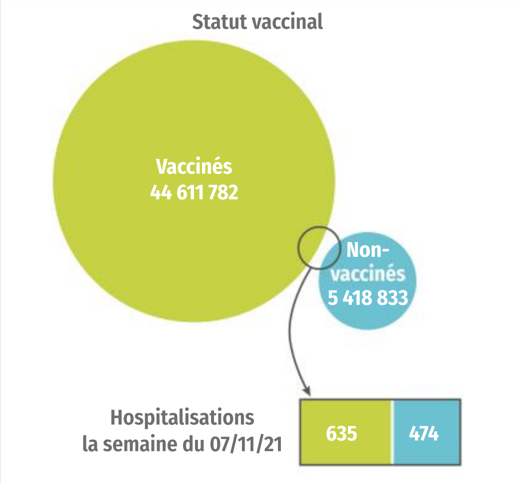
Fil rouge

Objectif **Introduire la notion de fréquence marginale et de fréquence conditionnelle.**

Doc. 1

En novembre 2021, alors que 50 390 000 Français présentaient un schéma vaccinal complet, une cinquième vague épidémique à la progression particulièrement rapide apparaît, liée à l'émergence d'un nouveau variant. Sur les réseaux sociaux, plusieurs internautes s'interrogent alors sur l'efficacité du vaccin.

Doc. 2 Statut vaccinal et hospitalisations des Français de plus de 20 ans le 07/11/21



Source : Drees

Doc. 3 Tableau d'effectifs à compléter

La population étudiée correspond aux personnes de plus de 20 ans.

	Vaccinés	Non-vaccinés	Total
Hospitalisés la semaine du 07/11/2021			
Non hospitalisés la semaine du 07/11/2021			
Total			

Questions

1 À l'aide des informations du **doc. 2**, compléter le tableau donné au **doc. 3**.

2 **a.** Quelle est la fréquence des vaccinés dans la population étudiée ? Quelle est la fréquence des non-vaccinés dans la population étudiée ?
b. Ces fréquences calculées par rapport à la population totale sont appelées des **fréquences marginales**. Quelles autres fréquences marginales aurions-nous pu calculer dans cette activité ?

3 On étudie maintenant la population formée des personnes de plus de 20 ans hospitalisées la semaine du 07/11/2021.
a. Quelle est la fréquence des vaccinés dans cette population ? Quelle est la fréquence des non-vaccinés dans cette population ? Ces fréquences, qui ne sont pas calculées sur la population totale mais uniquement sur une de ses parties, sont appelées **fréquences conditionnelles**.
b. Les fréquences conditionnelles calculées à la question précédente remettent-elles en question l'efficacité du vaccin ?

4 **a.** Parmi les vaccinés de plus de 20 ans, quelle est la fréquence des personnes hospitalisées la semaine du 07/11/2021 ?
b. Parmi les non-vaccinés de plus de 20 ans, quelle est la fréquence des personnes hospitalisées la semaine du 07/11/2021 ?

Bilan

Comment distinguer une fréquence marginale d'une fréquence conditionnelle ?

B D'un tableau croisé à un arbre pondéré

Objectif **Découvrir la notion de probabilité conditionnelle.**

Doc. 1 Taux de réussite au baccalauréat 2021

Avec 735 245* candidats et 689 000 bacheliers, le taux de réussite au baccalauréat 2021 est de 93,7 %. Il est de 97,5 % dans la voie générale, 93,9 % en technologique et 86,6 % en professionnel.

Extrait de la note 22.10 de mars 2022 de la direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance.

* Valeur corrigée : la note 22.10 arrondit la valeur à 735 200 candidats.

Doc. 2 Effectifs des élèves de terminale en 2021

Série	Générale	Technologique	Professionnelle
Effectif	381 132	145 125	208 988

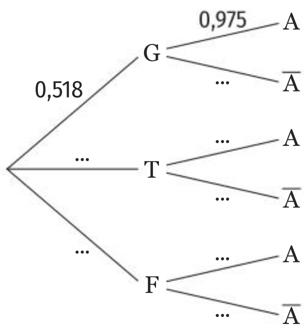
Doc. 3 Propriétés d'un arbre pondéré

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées.
- Dans un arbre, la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins menant à cet événement.

Doc. 4 Un arbre pondéré

On choisit un candidat au hasard parmi les candidats au baccalauréat 2021 et on définit les événements suivants.

- G : « Le candidat est dans la série générale. »
- T : « Le candidat est dans la série technologique. »
- F : « Le candidat est dans la série professionnelle. »
- A : « Le candidat est admis. »



Questions

1. Vérifier que le taux de réussite au baccalauréat 2021 est bien égal à 93,7 %.

2. **a.** Réaliser un tableau croisé d'effectifs modélisant la situation.
b. Calculer la fréquence conditionnelle des candidats admis parmi les candidats de la série générale. Dans quel document retrouve-t-on cette valeur ? À quoi correspond-elle sur ce document ?

3. **a.** On choisit, parmi les élèves ayant passé le baccalauréat 2021 dans la série générale, un élève au hasard. On note $P_G(A)$ la probabilité conditionnelle que l'élève soit admis à l'examen sachant qu'il a passé la session générale. Que vaut cette probabilité ?
b. Interpréter $P_F(A)$, puis calculer cette probabilité.

4. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré du **doc. 4**.
b. Interpréter $G \cap A$ puis calculer $P(G \cap A)$.
c. Calculer $P(A)$ en utilisant les chemins de l'arbre : quel résultat retrouve-t-on ?

Bilan

Qu'est-ce qu'une probabilité conditionnelle ? Où apparaissent ces probabilités dans un arbre pondéré ?

C Loterie

Objectif **Découvrir la notion d'événements indépendants.**

Un jeu mobile propose aux joueurs d'ouvrir un coffre chaque jour. Ces coffres peuvent contenir un arc, un bouclier ou une épée. La probabilité d'apparition de ces trois objets est identique chaque jour.

Questions

Partie A : Obtenir deux arcs

On note A_n l'événement « Obtenir l'arc le n-ième jour », B_n l'événement « Obtenir le bouclier le n-ième jour » et C_n l'événement « Obtenir le casque le n-ième jour » où n est un entier naturel non nul.

Un joueur s'inscrit au jeu, puis ouvre un coffre trois jours de suite.

1 **a.** Interpréter puis déterminer $P_{A_1}(A_2)$.
b. Interpréter puis déterminer $P(A_2)$. Comparer cette valeur à celle obtenue à la question précédente.
On dit que deux événements E et F sont **indépendants** lorsque $P_F(E) = P(E)$, autrement dit lorsque la probabilité de l'événement E ne dépend pas de la réalisation de l'événement F.

2 Que peut-on dire des événements A_1 et A_2 ? Comment l'expliquer par rapport au contexte ?

Partie B : Compléter la collection

Le joueur commence le jeu sans équipement. Il ouvre un coffre par jour dans l'espoir de détenir les trois objets le plus vite possible. Il souhaite connaître la probabilité d'y arriver dès le troisième jour.

On appelle U l'événement « Avoir un des trois objets le premier jour », D l'événement « Avoir deux des trois objets le deuxième jour » et T l'événement « Avoir les trois objets différents le troisième jour ».

1 Quelle est la probabilité de l'événement U ?

2 En énumérant les successions d'événements qui réalisent T, déterminer $P(T)$, c'est-à-dire la probabilité que le joueur possède trois objets différents le troisième jour.

> **Aide**
> 2 Par exemple, la succession (A_1, B_2, C_3) réalise T.

3 **a.** On suppose maintenant que le joueur possède deux objets différents le deuxième jour. Quelle est la probabilité que le coffre du troisième jour lui donne l'objet manquant ?
b. En déduire $P_D(T)$.

4 Comparer les résultats des questions 2 et 3 **b.** Les événements D et T sont-ils indépendants ?

Bilan

Comment définir mathématiquement que deux événements A et B sont indépendants en utilisant les probabilités conditionnelles ?

1 Calculer des fréquences

Définitions

Dans une série **statistique à deux variables** (ou **série statistique bivariée**), les valeurs sont généralement représentées dans un tableau croisé d'effectifs.

Les sommes des lignes et des colonnes d'un tableau à double entrée sont appelées les **marges** du tableau. Elles apparaissent en jaune dans le tableau ci-dessous.

La **fréquence marginale** d'une valeur est le quotient de l'effectif total de cette valeur par l'effectif total.

	A	$\overline{\mathrm{A}}$	Total
B	20	15	35
$\overline{\mathrm{B}}$	12	53	65
Total	32	68	100

Fréquence marginale de A :

$f = \frac{32}{100} = 0{,}32$

Remarque On parle de fréquence marginale car on utilise uniquement les nombres situés dans la marge du tableau.

Exemple

On considère une classe de première constituée de 32 élèves ayant choisi ou non la spécialité HGGSP.

Sur l'ensemble des 32 élèves de la classe, 21 ont choisi la spécialité HGGSP. La fréquence marginale de la valeur « Spécialité HGGSP » est donc $\frac{21}{32}$.

Sur l'ensemble des 32 élèves de la classe, 14 sont des filles. La fréquence marginale de la valeur « Filles » est donc égale à $\frac{14}{32}$, soit 43,75 %.

	Garçons	Filles	Total
Spécialité HGGSP	12	9	21
Pas Spécialité HGGSP	6	5	11
Total	18	14	32

Définition

Lorsque l'on cherche la fréquence d'apparition de la valeur A uniquement pour une sous-population non vide B de la série statistique, on dit que l'on calcule la **fréquence conditionnelle de la valeur A parmi B**.

Cette fréquence conditionnelle, notée $f_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$, est égale à $f_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{\text{effectif vérifiant à la fois A et B}}{\text{effectif de B}}$.

	A	$\overline{\mathrm{A}}$	Total
B	20	15	35
$\overline{\mathrm{B}}$	12	53	65
Total	32	68	100

Fréquence de A parmi B :

$f = \frac{20}{35}$

Remarque On parle de fréquence conditionnelle car on calcule la fréquence d'une valeur en imposant une condition.

Exemple

On reprend l'exemple ci-dessus et on cherche à connaître la fréquence de filles (valeur A) parmi les élèves n'ayant pas choisi la spécialité HGGSP (sous-population B). Dans le tableau, on lit qu'il y a 5 filles qui n'ont pas choisi la spécialité HGGSP sur un total de 11 élèves qui ne suivent pas cette spécialité.

Ainsi, $f_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{5}{11} \approx 0{,}455$. Parmi les élèves qui ne sont pas inscrits en HGGSP, il y a environ 45,5 % de filles.

2 Calculer des probabilités

Soit A et B deux événements d'un même univers de probabilité non nulle.

Définition

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A s'est déjà réalisé se note $P_A(B)$ et est définie par $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exemple

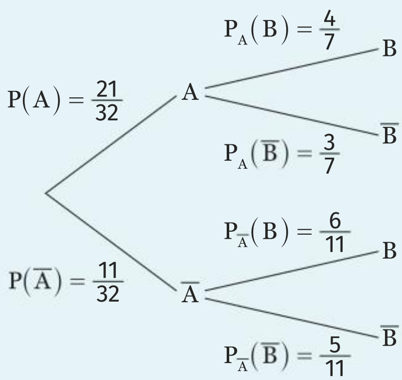
On reprend l'exemple précédent. On choisit un élève de la classe au hasard et on considère les événements A : « L'élève a choisi la spécialité HGGSP » et B : « L'élève est un garçon ». On utilise le tableau pour trouver $P_A(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$. La probabilité de choisir un garçon sachant que l'élève choisi suit la spécialité HGGSP est $\frac{12}{21}$.

Définition

Lorsqu'on réalise une expérience aléatoire mettant en jeu plusieurs événements, il est plus facile d'organiser les différentes issues en utilisant un **arbre de probabilités**. La première série de branche sépare les issues selon la réalisation du premier événement, la deuxième série de branche selon le deuxième événement, etc.

On indique sur chaque branche de l'arbre la probabilité correspondante comme indiquée sur l'arbre ci-contre.

Les probabilités du deuxième niveau de l'arbre sont des probabilités conditionnelles.



Propriétés

1. Dans un arbre de probabilité, la somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

2. On appelle **chemin** une suite de branches décrivant une succession d'événements. La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités situées sur les branches qui le composent.

3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Définition

Les événements A et B sont dits **indépendants** lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou, de manière symétrique, lorsque $P_B(A) = P(A)$.

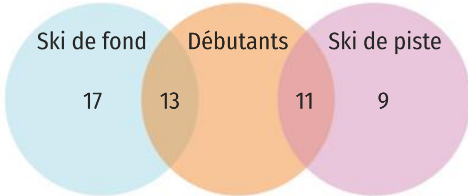
Remarque Intuitivement, cela signifie que la probabilité que B se réalise ne dépend pas de la réalisation de l'événement A.

Exemple

En conservant le même exemple, on observe que $P_B(A) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ et $P(A) = \frac{21}{32}$.
On en déduit que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Méthode 1 Calculer des fréquences à partir d'un tableau

Un groupe de skieurs est réparti selon leur préférence entre le ski de fond et le ski de piste de la façon ci-contre. Les skieurs qui ne sont pas débutants sont considérés comme étant expérimentés.



1. Construire le tableau croisé d'effectifs correspondant en différenciant les caractéristiques Débutant/Expérimenté d'une part et Ski de fond/Ski de piste d'autre part.
2. Calculer la fréquence des skieurs préférant le ski de piste.
3. Calculer, parmi les skieurs préférant le ski de piste, la fréquence des skieurs débutants.

Solution

1. On obtient le tableau d'effectifs suivant.

	Débutants	Expérimentés	Total
Ski de fond	13	17	30
Ski de piste	11	9	20
Total	24	26	50

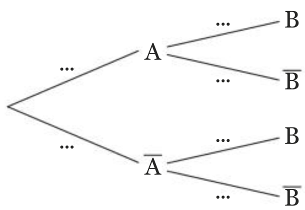
2. La fréquence des skieurs préférant le ski de piste est $\frac{20}{50} = 0{,}4$. Il s'agit d'une fréquence marginale.
3. Parmi les skieurs préférant le ski de piste, la fréquence des débutants est $\frac{11}{20} = 0{,}55$. Il s'agit d'une fréquence conditionnelle.

Méthode

1. Le diagramme permet de remplir les quatre cases roses. Ensuite, on remplit par additions les cellules jaunes, qui correspondent aux effectifs marginaux. Enfin, on remplit la cellule verte avec l'effectif total.
2. À partir d'un tableau croisé, on peut calculer :
   - les fréquences marginales en utilisant les effectifs marginaux (cases jaunes) ;
   - les fréquences conditionnelles en utilisant une sous-population de la population étudiée (donc une seule ligne ou une seule colonne).

Méthode 2 Passer d'un tableau à un arbre pondéré

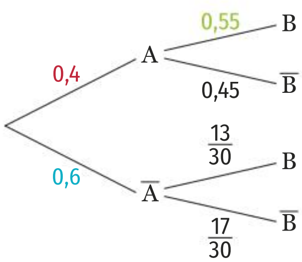
On reprend la situation de la méthode 1. On choisit un skieur au hasard et on note A l'événement « Le skieur préfère le ski de piste » et B l'événement « Le skieur est débutant ».



1. Calculer $P(A)$, puis recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Donner la valeur de $P_A(B)$ et interpréter le résultat.

Solution

1. $P(A)$ est indiqué en rouge sur la branche menant à l'événement A : $P(A) = \frac{20}{50} = 0{,}4$.
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$.
2. $P_A(B) = 0{,}55$. C'est la probabilité conditionnelle que B se réalise sachant que A s'est réalisé. La probabilité que le skieur choisi soit débutant, sachant qu'il préfère le ski de piste, est 0,55.



Méthode

- On utilise le tableau d'effectifs pour calculer les probabilités désirées.
- Attention, les probabilités du deuxième niveau de l'arbre (et éventuellement des suivants) sont des probabilités conditionnelles.

Méthode 1

À l'oral

7 On considère le tableau d'effectifs suivant.

	A	$\overline{A}$	Total
B	412	376	788
$\overline{B}$	1236	756	1992
Total	1648	1132	2780

1. Calculer la fréquence marginale de A.
2. Quelle est la fréquence marginale de $\overline{B}$?
3. Calculer la fréquence conditionnelle de A relativement à B.
4. Quelle est la fréquence conditionnelle de $\overline{B}$ relativement à A ?

8 Le tableau ci-dessous présente les activités préférées d'un groupe de 100 personnes.

	Pétanque	Piscine	Cartes	Total
Femmes	6	16	8	
Hommes	10	2	8	
Total				

1. Recopier et compléter ce tableau croisé.
2. Calculer les cinq fréquences marginales, et interpréter les résultats.
3. **a.** Calculer la fréquence conditionnelle des femmes parmi les joueurs de cartes.
b. Parmi les femmes, quelle est la fréquence des joueuses de pétanque ?

9 On donne la répartition des élèves d'un groupe en fonction des langues étudiées.

	Espagnol	Allemand
Garçons	3	6
Filles	9	6

1. Recopier le tableau, en ajoutant une ligne et une colonne pour y indiquer les effectifs marginaux.
2. Parmi tous les élèves, quelle est la fréquence marginale des garçons ? Des élèves étudiant l'espagnol ?
3. **a.** Parmi les garçons, quelle est la fréquence des élèves étudiant l'espagnol ?
b. Parmi les élèves étudiant l'espagnol, quelle est la fréquence de garçons ?

Méthode 2

À l'oral

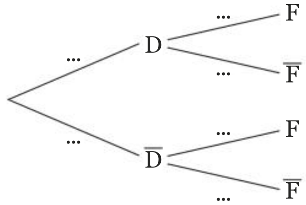
10 Une étude portant sur 100 personnes a donné les résultats suivants.

	Gauchers	Droitiers	Total
Filles	5	45	50
Garçons	15	35	50
Total	20	80	100

On choisit au hasard une des personnes ayant participé à l'étude et on note :

- D l'événement : « La personne choisie est droitière » ;
- F l'événement : « La personne choisie est une fille ».

Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



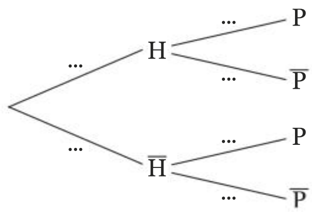
11 Le club de badminton de la commune souhaite organiser une coupe loisir et sonde ses adhérents pour savoir s'ils comptent y participer.

	Souhaitent participer	Ne souhaitent pas participer
Hommes	25	5
Femmes	20	2

On choisit un adhérent du club au hasard et on note :

- P l'événement : « L'adhérent souhaite participer à la coupe loisir » ;
- H l'événement : « L'adhérent est un homme ».

Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.
On écrira les probabilités sous forme de fractions irréductibles.



Méthode 3 Vérifier l'indépendance de deux événements

Pour chacune des situations suivantes, déterminer si les événements A et B sont indépendants.

Situation 1 : À partir de valeurs.

Soit A et B deux événements tels que :

$P(A) = 0{,}375$

$P(\overline{B}) = 0{,}2$

$P(A \cap B) = 0{,}3$

A et B sont-ils indépendants ?

Situation 2 : À partir d'un tableau croisé d'effectifs.

On donne les statistiques suivantes sur les élèves d'un lycée.

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes	Total
Mesure plus de 1,80 m	16	24	40
Mesure moins de 1,80 m	62	98	160
Total	78	122	200

On choisit au hasard un élève. Les événements A : « L'élève mesure plus de 1,80 m » et B : «L'élève porte des lunettes » sont-ils indépendants ?

Solution

Situation 1 :

On calcule $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}8$ et $P_A(B) = \dfrac{0{,}3}{0{,}375} = 0{,}8$.

Comme $P(B) = P_A(B)$, alors A et B sont indépendants.

Situation 2 :

On calcule directement à l'aide des données du tableau $P(B) = \dfrac{78}{200} = 0{,}39$ et $P_A(B) = \dfrac{16}{40} = 0{,}4 \neq 0{,}39$.

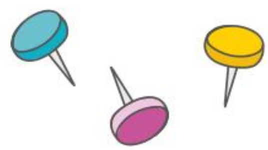
Donc A et B ne sont pas indépendants.

Méthode

- Une première méthode consiste à se ramener à la définition d'une probabilité conditionnelle pour calculer la probabilité $P_A(B)$ et conclure.
- Dans un tableau, on peut calculer directement les probabilités $P(B)$ et $P_A(B)$, puis vérifier qu'elles sont égales pour répondre à la question.

Méthode 4 Modéliser une succession d'événements indépendants

On lance trois fois de suite une punaise en l'air, de manière identique et indépendante. On suppose que la probabilité qu'elle tombe à plat sur le dos à chaque lancer est égale à 0,43. Quelle est la probabilité qu'elle ne tombe jamais à plat sur le dos ? Arrondir le résultat à 10^{-3} près.

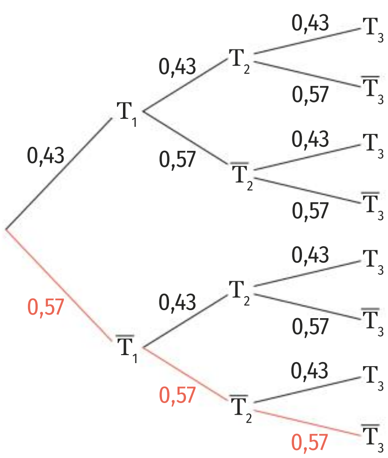


Solution

On peut modéliser cette expérience aléatoire par l'arbre pondéré ci-contre, où T_i est l'événement « La punaise est tombée à plat sur le dos au i-ième lancer ».

On a $P(T) = 0{,}43$ donc $P(\overline{T}) = 0{,}57$.

Le chemin rouge est celui qui nous intéresse. La probabilité cherchée est donc $0{,}57 \times 0{,}57 \times 0{,}57 \approx 0{,}185$.



Méthode

On utilise la bonne propriété du cours : dans un arbre, la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités situées sur les branches qui le composent.

Méthode 3

À l'oral

12 Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}32$.

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

13 Sur les 50 bâtiments d'une rue, on a relevé les effectifs suivants.

	Climatisés	Non-climatisés	Total
Habitations	12	23	35
Bureaux	10	5	15
Total	22	28	50

On entre dans un bâtiment au hasard. Les événements « Le bâtiment est climatisé » et « Il s'agit d'un bâtiment de bureaux » sont-ils indépendants ?

14 Soit C et D deux événements tels que $P(C) = 0{,}28$, $P(\overline{D}) = 0{,}7$ et $P(C \cap D) = 0{,}196$.

Les événements C et D sont-ils indépendants ?

15 Les garçons et les filles d'une classe de première sont soit demi-pensionnaires, soit externes. Leur répartition est donnée selon le tableau d'effectifs à double entrée suivant.

	Externes	Demi-pensionnaires
Garçons	3	9
Filles	4	12

On choisit dans la classe un élève au hasard.

Les deux événements « L'élève est un garçon » et « L'élève est externe » sont-ils indépendants ?

16 Lors de l'impression d'un document par un imprimeur, deux défauts majeurs peuvent intervenir : une erreur liée à l'encre, dont on estime la probabilité d'apparition à 0,08, ou une erreur liée à la feuille, dont la probabilité d'apparition s'élève à 0,02.

On estime que la probabilité qu'une impression cumule les deux défauts s'élève à 0,01.

Les deux événements « L'impression rencontre un problème d'encre » et « L'impression rencontre un problème de feuille » sont-ils indépendants ? Justifier.

Méthode 4

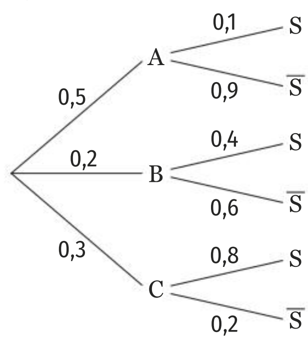
À l'oral

17 On lance une pièce équilibrée deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux résultats différents ?

18 Dans une urne opaque contenant deux boules rouges et trois boules vertes, on prélève successivement trois boules, au hasard et avec remise. Quelle est la probabilité que la troisième boule prélevée soit rouge ?

19 On considère l'arbre pondéré ci-dessous.

1. Calculer $P(A \cap S)$.
2. Calculer $P(S)$.
3. Quelle probabilité peut-on facilement lire sur cet arbre : $P_S(B)$ ou $P_B(S)$?



20 On a regroupé, dans deux sachets distincts, des jetons correspondant aux six voyelles de l'alphabet dans le premier sachet et aux vingt consonnes de l'alphabet dans le second.

On pioche au hasard un jeton de chacun des sachets, en commençant par le sachet contenant les voyelles.

Calculer la probabilité d'obtenir Y puis C.

21 On lance quatre fois de suite une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir pile à chaque fois ?

22 On lance successivement trois dés cubiques non pipés. Construire un arbre pondéré modélisant cette situation et en déduire la probabilité d'obtenir au maximum deux 4.

23 Chaque jour du lundi au vendredi, Timéo est en retard au lycée avec une probabilité égale à 0,15. En supposant ses déplacements indépendants, quelle est la probabilité que, une semaine donnée, Timéo ne soit jamais en retard ?

1 Calculer des fréquences

24

Le tableau ci-dessous donne la répartition, en millier, des personnes au chômage en France en 2021.

	< 25 ans	25-49 ans	> 49 ans
Femmes	268	621	252
Hommes	306	634	285

1. Calculer la fréquence marginale des moins de 25 ans parmi les personnes au chômage.
2. Calculer la fréquence conditionnelle des personnes au chômage de moins de 25 ans parmi les femmes au chômage.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des femmes parmi les personnes au chômage de moins de 25 ans.

25

Dans un lycée, 1200 élèves ont répondu à un sondage pour savoir s'ils viennent de manière autonome (à vélo ou à pied) ou s'ils sont conduits (transport en commun ou voiture) ainsi que pour savoir s'ils sont demi-pensionnaires ou externes :

- 40 % des élèves sont externes ;
- 75 % des élèves demi-pensionnaires sont conduits ;
- 85 % des élèves externes sont autonomes.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Autonomes	Conduits	Total
Externes			
Demi-pensionnaires			
Total			1200

2. En déduire la fréquence marginale des élèves autonomes.

26 Exercice inversé

On considère le tableau croisé d'effectifs suivant.

	A	B	Total
C	5	35	40
D	20	40	60
Total	25	75	100

Rédiger une situation utilisant ce tableau puis écrire quatre questions dont les réponses respectives sont $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$ et 0,8.

27 Fil rouge

Afin de sensibiliser les personnes aux risques liés au VIH, plusieurs associations proposent des tests rapides de diagnostic de la maladie. Ces tests, appelés Tests rapides d'orientation diagnostique (TROD), se déroulent en prélevant une goutte de sang au bout du doigt et le résultat est obtenu entre 2 et 30 minutes après le prélèvement. Pour que le résultat soit considéré fiable, il faut que le dernier rapport à risque ait eu lieu au moins trois mois avant le dépistage (rapport à risque ancien).

Une association a répertorié les informations collectées pendant une semaine à des fins statistiques.

	Tests positifs	Tests négatifs
Rapports à risque récents	12	735
Rapports à risque anciens	25	828

1. Quelle est la fréquence des tests positifs ?
2. Parmi les personnes dont le rapport à risque est récent, quelle est la fréquence des personnes testées positives ?
3. Parmi les personnes dont le rapport à risque est ancien, quelle est la fréquence des personnes testées positives ?
4. Comment peut-on expliquer la différence observée ?

28

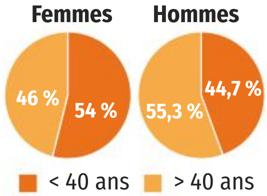
Le gérant d'un club de fitness recense les machines de sport de type cardio utilisées par ses adhérents à un moment donné.

	Hommes	Femmes	Total
Tapis de course	3	2	5
Vélos elliptiques	2	4	6
Rameurs	4	1	5
Total	9	7	16

1. Quelle est la fréquence marginale des tapis de course dans l'utilisation des machines cardio ?
2. Parmi les adhérents utilisant un vélo elliptique, quelle est la fréquence des femmes ?

29

En 2015, les donneurs de sang en France étaient composés de 52 % de femmes et de 48 % d'hommes.



1. Interpréter la donnée 46 % apparaissant sur ce graphique. S'agit-il d'une fréquence conditionnelle ou d'une fréquence marginale ?

2. En utilisant le graphique, recopier et compléter le tableau croisé de fréquences suivant.

	Femmes	Hommes	Total
Moins de 40 ans			
40 ans et plus			
Total			100 %

3. Quelle est la fréquence conditionnelle, à 0,01 près, des femmes parmi les donneurs de moins de 40 ans ?

2 Calculer des probabilités

30 En SVT

La composition du sang est identique pour tous les humains mais les antigènes présents sur les globules rouges varient d'un individu à l'autre.
Il existe quatre groupes sanguins : le groupe A possède uniquement les antigènes A, le groupe B uniquement les B, le groupe AB a les deux types d'antigènes et, enfin, le groupe O se caractérise par l'absence de ces deux types d'antigènes.

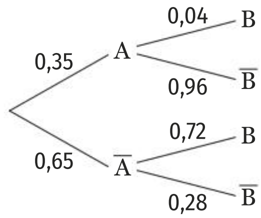
	Groupe A	Groupe B	Groupe AB	Groupe O
Globule rouge				
Anticorps	Anti-B	Anti-A	Aucun	Anti-A et Anti-B
Antigène	Antigène A	Antigène B	Antigènes A et B	Pas d'antigène

On suppose que 44 % des Français sont du groupe sanguin A et que 4 % sont du groupe AB.

On choisit un Français au hasard. Si l'antigène A est trouvé dans son sang, quelle est la probabilité que ce Français soit du groupe A ?

31

On donne ci-dessous un arbre pondéré. À quelle probabilité correspond chacune des pondérations apparaissant sur chaque branche ?



32

Dans un club d'aviron, les adhérents sont regroupés selon leur âge (les jeunes, les adultes et les seniors), puis en deux catégories (compétiteurs ou non).

Les effectifs sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Jeunes	Adultes	Seniors
Compétiteurs	15	32	8
Non compétiteurs	25	17	14

On choisit un adhérent au hasard. On définit les quatre événements suivants :

- J : « L'adhérent est un jeune » ;
- A : « L'adhérent est un adulte » ;
- S : « L'adhérent est un senior » ;
- C : « L'adhérent est un compétiteur ».

1. Décrire par une phrase les événements $C \cap J$ et $S \cap \overline{C}$.

2. Calculer les probabilités suivantes sous forme de fractions irréductibles, puis les interpréter dans le contexte de l'exercice.

a. $P(C \cap J)$ et $P(S \cap \overline{C})$.

b. $P(S)$ et $P(C)$.

c. $P_S(C)$, $P_C(S)$ et $P_{\overline{C}}(A)$.

33

Dans une usine, 7 % des appareils sortants ont un défaut de fabrication. Dans 75 % des cas, ce défaut est visible et le produit est alors écarté.
Certains appareils, pourtant sans défaut, sont retirés par erreur.
Sur un lot de fabrication de 800 appareils, 64 sont écartés.

1. Compléter le tableau suivant.

	Défaut	Correct	Total
Écartés			
Conservés			
Total			800

2. On choisit au hasard un appareil parmi les produits écartés.
Quelle est la probabilité qu'il ait un défaut ?

3. Quelle est la probabilité qu'un produit conservé ait malgré tout un défaut ?

34

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

1. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit un nombre pair et un nombre supérieur ou égal à 4 ?

2. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit un nombre pair sachant que c'est un nombre supérieur ou égal à 4 ?

3. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit impair sachant que c'est un nombre premier ?

35

26 % des étudiants français suivent leurs études en Île-de-France. Les autres les suivent en province.

Parmi les étudiants d'Île-de-France, 51 % sont inscrits à l'université alors que 62 % des étudiants de province sont inscrits dans une université.

On choisit un étudiant français au hasard. On note :

- F l'événement : « L'étudiant choisi est inscrit en Île-de-France » ;
- U l'événement : « L'étudiant choisi est inscrit dans une université ».

1. Donner les valeurs de $P_F(U)$ et de $P_{\overline{F}}(U)$.

2. Déterminer la probabilité que l'étudiant choisi soit inscrit en province.

3. Déterminer la probabilité que l'étudiant choisi soit inscrit dans une université de province.

36

Dans un lycée de 1250 élèves, 300 élèves se font vacciner contre la grippe.
Pendant l'hiver, une épidémie de grippe éclate et 10 % des élèves contractent la maladie.
Par ailleurs, 3 % des élèves vaccinés ont la grippe.
On choisit au hasard l'un des élèves de ce lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis.
On considère les événements suivants :

- V : « L'élève choisi a été vacciné » ;
- G : « L'élève choisi a eu la grippe ».

1. Réaliser un tableau croisé d'effectifs pour représenter cette situation.

2. Calculer la probabilité des événements V et G.

3. D'après l'énoncé, que vaut $P_V(G)$?

4. Modéliser l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré.

5. Interpréter l'événement $V \cap G$, puis calculer sa probabilité.

6. Interpréter l'événement $V \cup G$, puis calculer sa probabilité.

Aide

On rappelle : $P(V \cup G) = P(V) + P(G) - P(V \cap G)$.

7. On choisit un élève au hasard parmi ceux qui ont été vaccinés.
Quelle est la probabilité qu'il ait eu la grippe ?

8. On choisit un élève au hasard parmi ceux qui n'ont pas été vaccinés.
Quelle est la probabilité qu'il ait eu la grippe ?

37 Exercice inversé

Soit T et U deux événements indépendants qui se réalisent successivement tels que $P(U) = 0{,}38$ et $P(T) = 0{,}47$.
Proposer un contexte et un arbre pondéré permettant de modéliser cette situation.

38

Dans un cinéma, 32 % des clients achètent des sucreries pour visionner leur film et 27 % des clients achètent des boissons. On observe que 5 % des clients achètent à la fois des sucreries et des boissons.
On choisit un client de ce cinéma au hasard.
Les événements « Le client a acheté des sucreries » et « Le client a acheté une boisson » sont-ils indépendants ?

39 Fil rouge

Lorsqu'un test rapide de diagnostic (TROD) du VIH s'avère être positif (voir exercice **27**), les patients sont redirigés vers des professionnels de santé afin de chercher la présence d'anticorps anti-VIH dans le sang. La notice d'utilisation indique que, pour ce type de tests, la probabilité d'être décelé positif sachant que l'on n'est pas porteur du VIH s'élève à 0,002 et que la probabilité d'être décelé négatif sachant que l'on est porteur du VIH est nulle, sous réserve de ne pas avoir vécu de risque infectieux dans les trois derniers mois. Une association observe que, parmi les patients positifs au TROD, 99,8 % des tests effectués sont positifs. Si on choisit le dossier au hasard d'une personne ayant effectué un test diagnostic du VIH, quelle est la probabilité, à 0,1 % près, qu'elle ne soit pas porteuse du virus ?

40 Copie d'élève

La professeure de Déborah donne l'énoncé suivant.

Une tireuse sportive atteint sa cible avec une probabilité égale à 0,99. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
Elle tire deux fois. Calculer la probabilité que la tireuse ne rate aucun de ses deux tirs.

Pour répondre à cette question, Déborah a écrit ce qui suit.

> *La tireuse atteint sa cible avec une probabilité égale à 0,99.*
>
> *Elle atteint donc sa cible deux fois lors de ses deux tentatives avec une probabilité égale à* $2 \times 0{,}99 = 1{,}98$.

Indiquer l'erreur commise par Déborah. Proposer une correction en justifiant le raisonnement.

Défis !

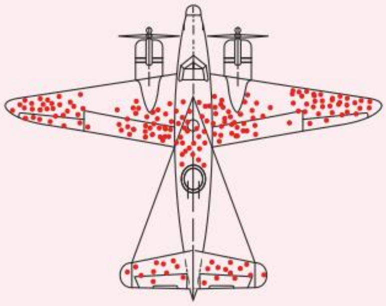
41 Le jeu de passe-dix est un jeu très à la mode à la cour de Florence au XVII^e siècle. Le jeu se joue avec trois dés et il s'agit de faire plus de dix points en un seul coup. Le duc de Toscane aurait alors observé qu'il était plus courant d'obtenir une somme égale à 11 qu'une somme égale à 12, alors qu'il existe autant de façons d'obtenir 11 que 12.

Comment expliquer ce paradoxe apparent ?

42 Amandine et Béatriz jouent à un jeu de hasard en trois manches gagnantes et misent toutes les deux la même somme d'argent. Les deux joueuses ont la même probabilité de gagner chaque manche. Le jeu est soudainement interrompu alors qu'Amandine mène deux manches à une. Comment les joueuses doivent-elles se répartir les mises de départ en prenant en compte la situation actuelle ?

Ce problème est connu sous le nom du problème du chevalier de Méré (plus d'informations p. 46).

43 Pendant la Seconde Guerre mondiale, les Alliés constatèrent que leurs bombardiers revenaient de mission parfois touchés par des balles ennemies. Une étude statistique fut faite. Sur le dessin ci-dessous, on a représenté par un point rouge les points les plus souvent touchés sur les bombardiers revenus de mission.



1. Décrire précisément la population sur laquelle est effectuée l'étude statistique.
2. Indiquer sur le dessin les endroits où vous proposeriez de renforcer le blindage.

Remarque Cette double-page permet d'approfondir les notions de ce chapitre et de travailler de façon différenciée avec les élèves de la classe, notamment avec les plus à l'aise en mathématiques ou bien avec celles et ceux qui souhaiteraient choisir l'option mathématiques complémentaires en terminale.

Cours

Compléments

Propriétés (Formule des probabilités totales)

On considère deux événements A et B d'un même univers et de probabilités non nulles. On a alors :

1. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$;

2. $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$.

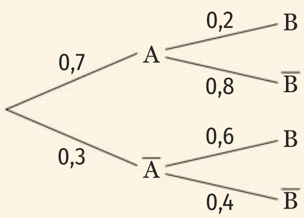
Exemple

Dans l'arbre de probabilité ci-contre on a :

$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

$= 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}6$

$= 0{,}32$



Propriété (Indépendance de deux événements)

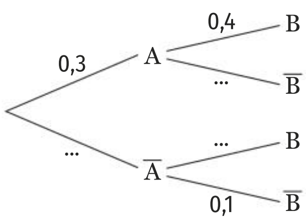
Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. A et B sont **indépendants** si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Démonstration Voir exercice 47.

44 Soit A et B deux événements équiprobables et indépendants tels que $P(A \cap B) = 0{,}49$.

Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

45 Après avoir complété l'arbre de probabilité ci-dessous, calculer $P(B)$ et $P_B(A)$.



46 Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}7$ et $P(A \cup B) = 0{,}76$.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

47 Démo On considère deux événements A et B de probabilités non nulles.

1. Dans un premier temps, on suppose que A et B sont indépendants.

a. Justifier que $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

b. En déduire que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$.

2. Réciproquement, on suppose maintenant que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$.

a. Montrer que $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

b. En déduire que $P(A) = P_B(A)$.

3. Quelle équivalence a-t-on démontrée ?

48 Durant l'hiver, la probabilité pour qu'une personne ait la grippe est estimée à 5 %. Le diagnostic clinique est posé lorsque la personne présente les symptômes suivants : courbatures, fièvre subite, signes respiratoires. Durant l'hiver, la probabilité pour qu'une personne présente ces symptômes est estimée à 10 %. On sait aussi qu'une personne ayant la grippe a 80 % de risque d'avoir ces symptômes. Soit G et S les événements :

- G : « L'individu a la grippe » ;
- S : « L'individu présente les symptômes ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.

2. Quelle est la probabilité d'avoir la grippe et de présenter les symptômes décrits ci-dessus ?

3. Quelle est la probabilité d'avoir la grippe sachant qu'on présente les symptômes décrits ci-dessus ?

49 Soit A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0{,}7$ et $P(\overline{B}) = 0{,}35$.

1. Rappeler la relation entre $P(A)$ et $P(\overline{A})$.

2. Calculer $P(A \cap B)$.

3. En déduire $P(A \cup B)$.

50 Copie d'élève

On donne l'énoncé suivant.

Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}58$. Calculer $P_{\overline{A}}(B)$.

Thomas propose les calculs ci-dessous.
Expliquer son raisonnement en explicitant les formules utilisées.

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}28$

$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}3$

$P(\overline{A}) = 0{,}6$

$P_{\overline{A}}(B) = 0{,}3 \div 0{,}6 = 0{,}5$

51 On considère le tableau croisé de probabilités ci-dessous, où A et B sont deux événements indépendants.

	B	$\overline{B}$
A	0,062	0,138
$\overline{A}$	0,248	0,552

1. Construire deux arbres pondérés correspondant à cette expérience aléatoire.

2. A et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ? Justifier.

52 En arrivant devant la porte de son domicile, Johanna sort son trousseau de clés comportant trois clés d'aspect identique, dont une seule peut ouvrir la porte. Chaque fois qu'elle essaie une clé au hasard, soit elle ouvre la porte et l'expérience aléatoire est terminée, soit elle remet la clé dans le trousseau et recommence.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ouvre la porte au troisième essai ?

2. On considère à présent le cas de figure où Johanna ne remet pas la clé essayée dans le trousseau. Quelle est alors la probabilité qu'elle ouvre la porte au troisième essai ?

53 À la fin du mois de janvier 2022, la probabilité qu'un Français choisi au hasard dans la population soit porteur de la COVID-19 est montée à 0,038.

Le protocole propose alors de se faire tester par un test antigénique, et, s'il est positif, de confirmer par un test PCR. Si ce test revient positif, la personne est déclarée malade.

On suppose que :

- pour le test antigénique, si la personne est porteuse du virus, son test sera positif avec une probabilité égale à 0,85. Sinon, il est positif avec une probabilité égale à 0,01 ;
- pour le test PCR, si la personne est porteuse du virus, son test sera positif avec une probabilité égale à 0,92. Sinon, il est positif avec une probabilité égale à 0,01 ;
- les résultats des deux tests sont indépendants.

1. Une personne est porteuse de la COVID-19. Quelle est la probabilité qu'elle soit déclarée malade ? Ce résultat semble-t-il satisfaisant ?

2. Mêmes questions avec une personne saine.

3. Quelle est la probabilité d'être porteur du virus si on a été déclaré malade ? Si on a été déclaré sain ?

4. Que penser finalement de l'efficacité de ce test ?

54 On considère l'expérience qui correspond à lancer un dé à 20 faces numérotées de 1 à 20. Les événements « Le résultat obtenu est pair » et « Le résultat obtenu est un multiple de 3 » sont-ils indépendants ?

55 Soit A et B deux événements indépendants.

Montrer que $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

Le problème de Monty Hall

Doc. 1 Let's Make a Deal

Le problème de Monty Hall est un problème probabiliste inspiré du jeu télévisé américain « Let's Make a Deal » et prend son nom du présentateur de l'émission. Voici les règles du jeu.
Devant le candidat se trouvent trois portes. Parmi elles, deux portes ouvrent sur une chèvre et la dernière porte ouvre sur une voiture.
Le jeu se déroule en plusieurs étapes :

1. le candidat choisit l'une de ces trois portes ;
2. le présentateur ouvre ensuite l'une des deux portes restantes en ouvrant systématiquement une porte cachant une chèvre ;
3. le présentateur offre le choix au candidat de conserver la porte choisie initialement ou de modifier son choix ;
4. une fois le choix du candidat effectué, la porte qu'il a finalement choisie s'ouvre et le candidat remporte ce qui s'y cache.

Doc. 2 Notations

On note les événements suivants :

- C_1 : « Le candidat choisit la porte ouvrant sur la chèvre 1 » ;
- C_2 : « Le candidat choisit la porte ouvrant sur la chèvre 2 » ;
- V : « Le candidat choisit la porte ouvrant sur la voiture » ;
- P_1 : « Le présentateur choisit la porte ouvrant sur la chèvre 1 » ;
- P_2 : « Le présentateur choisit la porte ouvrant sur la chèvre 2 ».

Doc. 3 Arbre de probabilité si le candidat change de porte à l'étape 3

Choix candidat	Choix présentateur	Gain
C_1	P_2	Voiture
C_2	P_1	Voiture
V	P_1	Chèvre 2
	P_2	Chèvre 1

Doc. 4 Arbre de probabilité si le candidat ne change pas de porte à l'étape 3

Choix candidat	Choix présentateur	Gain
C_1	P_2	Chèvre 1
C_2	P_1	Chèvre 2
V	P_1	Voiture
	P_2	Voiture

Questions

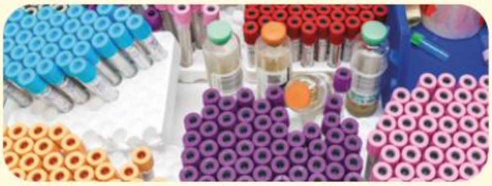
1. Expliquer comment a été construite la colonne « Gain » du doc. 3.
2. Expliquer comment a été construite la colonne « Gain » du doc. 4.
3. **a.** Calculer la probabilité que le candidat remporte la voiture en changeant de porte à l'étape 3.
   b. Calculer la probabilité que le candidat remporte la voiture sans changer de porte.
4. Est-il plus avantageux pour le candidat de changer de porte au cours de l'étape 3 ?

Fil rouge du chapitre

1 Fiabilité d'un test médical

Sujet : Les tests médicaux utilisés ne sont jamais fiables à 100 % : il existe le risque de rencontrer un faux positif ou un faux négatif qui fausse les résultats du test.

Comment mesurer la fiabilité d'un test médical ?



Pistes de recherche :

- Définir les notions de sensibilité et de spécificité d'un test médical, en expliquant la différence entre les deux.
- Pour améliorer la qualité d'un test médical, est-il plus stratégique d'améliorer sa sensibilité ou sa spécificité ?
- Dans le cadre des tests de dépistage du VIH, quelles sont les caractéristiques du test TROD ? D'un test en laboratoire (ELISA ou Western Blot) ?

Fil rouge :

- Activité A p. 49
- Ex. 27 p. 58
- Ex. 39 p. 61

EXPOSÉ INVERSÉ

Cet exposé peut être réalisé en « Exposé inversé ». Les orateurs commencent par une brève présentation du sujet et ce sont ensuite les élèves de la classe qui doivent poser des questions, préparées en avance, pour faire avancer l'exposé.

2 Jeu de « croix ou pile »

Sujet : Les probabilités sont couramment utilisées dans la théorie des jeux. Elles permettent de modéliser les probabilités de gagner un jeu, une somme d'argent, etc. C'est notamment le cas du jeu de « croix ou pile », version complexifiée du « pile ou face ».

Comment estimer la probabilité de gagner au jeu de « croix ou pile » ?

Pistes de recherche :

- Rechercher les règles du jeu de « croix ou pile ».
- Parmi les savants français, D'Alembert a proposé une réponse à ce problème. Rechercher le raisonnement de D'Alembert et expliquer pourquoi il est faux.
- Proposer éventuellement une simulation à l'aide d'un outil numérique afin de remettre en question l'affirmation de D'Alembert.

CONSEILS POUR L'ORAL

- Se tenir droit.
- Ne pas mettre les mains dans ses poches.
- Bien regarder les personnes en face de soi.

Partie

3 Phénomènes

Histoire des mathématiques

Des suites dans l'histoire des mathématiques

Une suite numérique est une liste de valeurs, qui peut être infinie ou non. Historiquement, elles ont été utilisées dans deux principales situations :

- pour donner des valeurs approchées de nombres ;
- pour modéliser des évolutions successives.

On trouve des suites dès l'apparition de l'écriture chez les Mésopotamiens. Avec le développement de l'analyse et de l'informatique, les suites sont omniprésentes de nos jours.

Archimède (III^e siècle avant J.-C.)

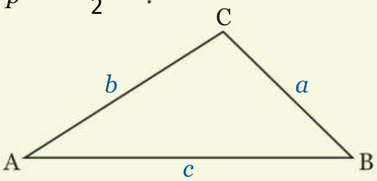
Archimède et les suites géométriques

Parmi les très nombreux travaux d'**Archimède** (III^e siècle avant J.-C.), on trouve les formules pour calculer des surfaces et les volumes du cylindre et de la sphère. Dans ses démonstrations, il s'appuie sur le principe d'exhaustion, un procédé ancien de calculs d'aires et de volumes. Ses démonstrations font apparaître des suites géométriques de raison $\frac{1}{4}$.

La suite de Héron d'Alexandrie

Héron d'Alexandrie (10-70) est un ingénieur, mécanicien, physicien et mathématicien. Il est surtout connu pour ses travaux dans lesquels il décrit des systèmes mécaniques applicables aussi bien à l'ouverture ou la fermeture de portes de temples qu'au fonctionnement d'une horloge. On lui doit également plusieurs formules mathématiques comme celle qui porte son nom sur le calcul d'aire du triangle sans connaître sa hauteur. Un algorithme porte également son nom : celui qui permet d'approcher la valeur de la racine carrée de tout nombre a positif (voir ci-contre). Cet algorithme permet de définir une suite de nombres dont les valeurs se rapprochent de plus en plus de celle de la racine carrée de a. Même si cet algorithme a été utilisé par les Mésopotamiens plusieurs millénaires avant lui, c'est le premier à l'avoir décrit dans son livre *Les Métriques*, à en avoir proposé sa démonstration et à prouver que l'algorithme donne bien toujours la réponse souhaitée.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Formule de Héron pour calculer l'aire d'un triangle.

Puisque donc, 720 n'a pas de racine rationnelle, nous extrairons, avec la plus petite différence possible, la racine de la façon suivante : puisque le carré qui s'approche le plus de 720 est 729 et a pour racine 27, divise 720 par 27 ; cela fait 26 plus 2/3 ; ajoute 27 ; cela fait 53 plus 2/3 ; prends-en la moitié ; cela fait 26 plus 1/2 plus 1/3. Ainsi donc, la racine la plus proche de 720 sera 26 plus 1/2 plus 1/3. En effet, 26 plus 1/2 plus 1/3 multiplié par lui-même fait 720 plus 1/36 ; de sorte que, la différence est de 1/36.
Si nous voulons que la différence devienne inférieure à 1/36, nous mettrons les 720 plus 1/36 trouvés toute à l'heure à la place de 729 et, après avoir fait les mêmes opérations, nous trouverons que la différence devient inférieure de beaucoup à 1/36.

Algorithme de Héron.

d'évolution

Fibonacci

Fibonacci (1170-1250)

Extrait du *Liber Abbaci*, 1202.

Après avoir vécu longtemps en Afrique du Nord, Leonardo Pisano, dit **Fibonacci** (1170-1250), en rapporte l'ensemble des connaissances mathématiques qu'il publie en 1202 dans le *Liber Abbaci*. Il y présente pour la première fois en Europe le système de numération dit arabe et, à travers différents exemples, il cherche à montrer quels sont les avantages de ce système numérique. On trouve dans ce livre ce qui est considéré comme l'un des premiers exemples de modélisation de l'évolution d'une population, une population de lapins, à travers la suite de Fibonacci :

1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ; 233 et 377.

À partir des deux premiers termes de la suite, on peut trouver tous les termes qui suivent en additionnant les deux précédents : par exemple, $3=1+2$, ou $144=55+89$.

La suite de Fibonacci possède de très nombreuses propriétés mathématiques. On prête également à la suite de Fibonacci de nombreuses propriétés que l'on retrouve dans la nature.

Peano et les nombres entiers

Giuseppe Peano (1858-1932)

L'idée que l'on peut se faire d'un nombre entier naturel semble assez évidente, à tel point que l'Homme les a depuis toujours utilisés sans se poser de question sur leur existence. Cependant, à la fin du XIXe siècle, les mathématiciens ont senti le besoin de prouver et redéfinir l'existence de tous les objets mathématiques. C'est ainsi que Richard Dedekind (1831-1916) et **Giuseppe Peano** (1858-1932) ont proposé de façon indépendante une construction des entiers naturels dont voici les axiomes :

1. l'élément appelé zéro, et noté 0, est un entier naturel ;

2. tout entier naturel n a un unique successeur, que l'on peut noter $s(n)$;

3. aucun entier naturel n'a 0 pour successeur ;

4. deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux ;

5. si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Les travaux de Peano ont aussi permis de prouver la validité du raisonnement par récurrence. Peano a également proposé la notation $\mathbb{N}$ et les symboles $\cap$, $\cup$, $\in$, etc. que l'on utilise encore de nos jours.

Chapitre 3

Croissance linéaire

Objectifs du chapitre :

1. Reconnaître un modèle discret ou continu.
2. Calculer $u(n)$ pour un entier n donné dans le cas d'une suite arithmétique.
3. Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une suite arithmétique ou d'une fonction affine.
4. Déterminer un seuil par le calcul ou graphiquement.

Fil rouge du chapitre

Pourquoi les abysses sont-ils des zones de la Terre aussi peu explorées ?

Exercices rituels

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x - 2.$$

Calculer l'image de 4, puis l'antécédent de 13 par f.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4 - 2x = 5x + 1$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $\frac{3}{x} = 6$.

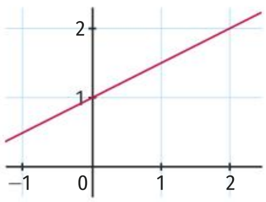
4 En électricité, la loi d'Ohm permet d'écrire $\mathrm{U} = \mathrm{R} \times \mathrm{I}$, où U s'exprime en volt (V), R en ohm (Ω) et I en ampère (A).

Déterminer la valeur de U lorsque $\mathrm{I} = 10$ A et $\mathrm{R} = 30\ \Omega$.

5 D'après la loi d'Ohm citée dans l'exercice précédent, déterminer la valeur de I lorsque $\mathrm{U} = 210$ V et $\mathrm{R} = 20\ \Omega$.

6 Un article coûte 45 €. Quel est son prix après une augmentation de 15 % ?

7 Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite représentée ci-contre.

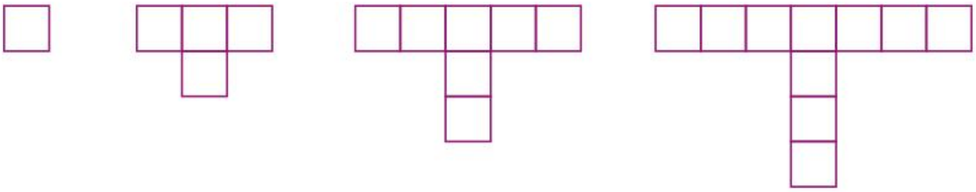


D'autres exercices rituels p. 10 ou sur LLS.fr/EM1Rituels

A Les suites arithmétiques

Objectif **Établir quelques caractéristiques des suites arithmétiques.**

On considère un carré de côté 1. On réalise plusieurs figures successives en ajoutant des carrés identiques à chaque étape comme indiqué ci-dessous.



Questions

Partie 1 : Construction d'une suite

On note $c(n)$ le nombre de carrés nécessaires pour construire la figure à l'étape n. La figure initiale correspond à l'étape 0. Le premier terme est donc $c(0)=1$ et on a, par exemple, $c(2)=7$.

1. En utilisant l'illustration ci-dessus, déterminer $c(1)$ et $c(3)$.
2. Combien de carrés ajoute-t-on pour passer d'une étape à la suivante ? Calculer alors $c(4)$ puis $c(5)$.

En continuant ainsi, on obtient une suite de nombres, notée c. Dans ce cas, on dit que la suite c est une **suite arithmétique** de **premier terme** $c(0)=1$ et de **raison** $r=3$.

3. Pour tout entier naturel n, écrire $c(n+1)$ en fonction de $c(n)$. Cette relation s'appelle la **relation de récurrence** de la suite c.
4. Comment calculer $c(100)$ en fonction de $c(99)$? Est-ce facilement réalisable ?

Partie 2 : Une nouvelle suite

On s'intéresse maintenant au périmètre de la figure à chaque étape.
On note $p(n)$ le périmètre de la figure à l'étape n. On a ainsi $p(0)=4$ et $p(1)=10$.

5. En utilisant l'illustration ci-dessus, déterminer $p(2)$ et $p(3)$.
6. Justifier que la suite p est une suite arithmétique. Donner alors le premier terme, la raison et la relation de récurrence de $p(n+1)$ en fonction de $p(n)$.
7. **a.** De quelle longueur le périmètre a-t-il augmenté entre l'étape initiale et l'étape 2 ? Entre l'étape initiale et l'étape 3 ?

   b. Recopier et compléter les égalités suivantes : $p(2)=p(0)+\ldots\times 6$; $p(3)=p(0)+\ldots\times 6$.

   c. Compléter la **forme explicite** de p : pour tout entier naturel n, $p(n)=p(0)+\ldots\times\ldots$.
8. Calculer le périmètre de la figure à l'étape 100.

Bilan

On considère une suite arithmétique u. Quels en sont les éléments caractéristiques ? Donner une relation de récurrence de u et une forme explicite.

B Ça chauffe

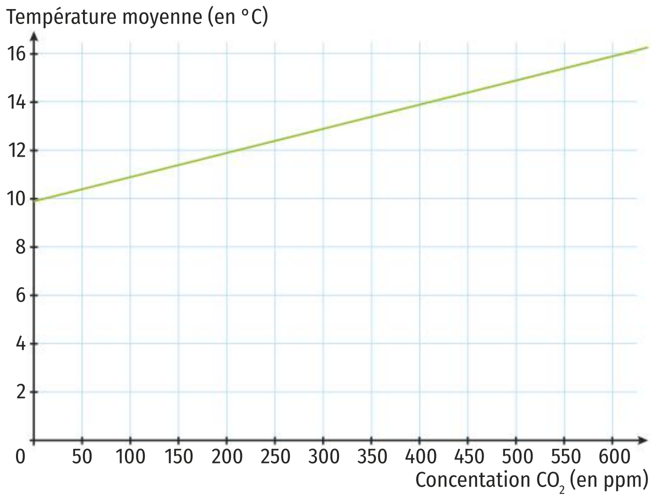
Objectif **Modéliser une situation à l'aide d'une fonction affine.**

Doc. 1 Modèle de White

La température moyenne T, en °C, à la surface de la Terre dépend de la concentration moyenne c, exprimée en ppm (voir **doc. 3**), de CO_2 dans l'atmosphère. D'après le modèle de William M. White (2005), cette dépendance est donnée par la formule $T(c) = T_0 + \frac{c - c_0}{100}$, où T_0 est la température moyenne à la surface de la Terre en °C à une année donnée et c_0 la concentration moyenne, en ppm, lors de cette même année.

Doc. 2 Représentation graphique du modèle de White

On choisit 1990 comme année de référence dans le modèle de White. Pour cette année-là, $T_0 = 13{,}4$ °C et $c_0 = 352$ ppm.



Doc. 3 Partie par million

La notation « ppm » signifie « partie par million ». Par exemple, lorsque l'on dit que la concentration de CO_2 dans l'atmosphère est de 300 ppm, cela signifie que 300 millionièmes de l'atmosphère sont constitués de CO_2.
Autrement dit, la proportion de CO_2 est $\frac{300}{1\,000\,000}$ de l'ensemble des composants de l'atmosphère.

Questions

1. En 2014, la concentration de CO_2 dans l'atmosphère était de 400 ppm. À l'aide du graphique, donner la température moyenne lors de cette année.

2. En 2020, la concentration de CO_2 dans l'atmosphère était de 413,2 ppm. Par le calcul, vérifier que la température moyenne à la surface de la Terre en 2020 était environ 14,01 °C.

3. **a.** En utilisant la formule du modèle de White, justifier que la fonction T est une fonction affine dont on déterminera le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

   b. Déterminer et interpréter le sens de variation de la fonction T. Pourquoi est-il important de limiter l'émission de CO_2 dans l'atmosphère ?

Bilan

Quel type d'évolution modélise une fonction affine ?

C Discret ou continu ? Fil rouge

Objectif **Distinguer les grandeurs discrètes et continues.**

Doc. 1 Exemples de grandeurs discrètes et continues

En mathématiques, on peut considérer des grandeurs discrètes ou continues.
Voici quelques exemples de grandeurs discrètes : nombre d'enfants dans une famille, nombre de sports pratiqués en loisir, numéro des étages dans un immeuble (avec des négatifs pour les sous-sols), etc.
Quelques exemples de grandeurs continues : temps passé sur les réseaux sociaux, température dans une salle de classe, taille d'une personne, etc.

Doc. 2 Pression

La **pression** est une force appliquée sur une surface. Les liquides et les gaz qui nous environnent sont constitués de plusieurs composants qui appliquent une pression constante sur notre corps. La pression est mesurée en newton par mètre carré (N/m^2), autrement appelé le **bar** (1 bar = 1 N/m^2).
Au niveau de la mer, la pression atmosphérique vaut en moyenne 1 bar.

Doc. 3 Changement de pression

Lorsque l'on monte en altitude, la pression de l'air diminue car l'atmosphère est moins dense. À l'inverse, lors d'une plongée sous-marine, la pression supportée par le plongeur augmente car la colonne d'eau qui le surplombe pèse de plus en plus sur lui. On peut démontrer que, tous les dix mètres, la pression dans l'eau augmente d'un bar.

Doc. 4 Arnaud Jerald

Arnaud Jerald pratique l'apnée en compétition en catégorie poids constant bi-palmes. En septembre 2020, il bat le record du monde d'apnée en effectuant une plongée à -112 mètres.

Questions

1 **a.** La pression subie par un plongeur est la somme de la pression de l'atmosphère (que l'on prendra égale à 1 bar) et de la pression de l'eau. Quelle pression subit-il lorsqu'il est à 10 m de profondeur ?

b. Quel est le pourcentage d'augmentation de la pression entre 0 m et -10 m ?

2 **a.** Quelle est la pression subie par un plongeur situé à 20 m de profondeur ?

b. Quel est le pourcentage d'augmentation de la pression entre -10 m et -20 m ?

3 On note $u(n)$ la pression subie par le plongeur lorsqu'il est à n dizaines de mètres de profondeur.

a. Justifier que la suite u est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

b. Calculer et interpréter $u(5)$.

4 On souhaite connaître la pression subie par Arnaud Jerald en 2020 lors de son record du monde de plongée.

a. Justifier que la modélisation par une suite de la question 3 n'est en fait pas adaptée à la situation.

b. Puisque la variation de la pression est constante par rapport à la variation de profondeur, modéliser la pression en fonction de la profondeur en utilisant une fonction affine.

c. Calculer alors la pression subie par Arnaud Jerald.

Bilan

Quelle est la différence entre une grandeur discrète et une grandeur continue ? Comment les distingue-t-on graphiquement ?

1 Suites arithmétiques

Définitions

Une **suite** u est une fonction dont la variable, notée n plutôt que x, est un entier naturel.
Le nombre $u(n)$ est appelé le **terme de rang n** de la suite u.

Définitions

Une suite u est **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r, nommé **raison**, tel que pour tout entier naturel n : $u(n+1)=u(n)+r$. L'écriture du terme de rang $n+1$ en fonction du terme de rang n donne une **relation de récurrence** vérifiée par la suite.

Exemple

Une suite u vérifiant, pour tout entier naturel n, $u(n+1)=u(n)+4$ est une suite arithmétique.
Si on a $u(0)=5$, alors le deuxième terme est $u(1)=u(0)+4=5+4=9$. Le troisième terme est $u(2)=u(1)+4=9+4=13$. Attention, le premier terme de la suite étant $u(0)$, le dixième terme est $u(9)$.

Propriété

Une suite u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u(0)$ si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u(n)=r\times n+u(0)$. Cette écriture est la **forme explicite** de la suite u.

Propriété

Dans un repère, une suite peut être représentée par le nuage de points de coordonnées $(n\,;u(n))$, $n\in\mathbb{N}$. Dans le cas d'une suite arithmétique, ce nuage de points forme un ensemble de points alignés.

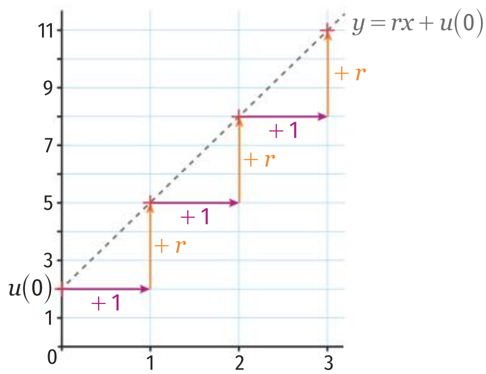
Exemple

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u(0)=2$ et de raison 3. Elle est donc définie par la relation de récurrence $u(n+1)=u(n)+3$.

Sa forme explicite est donnée, pour tout entier naturel n, par $u(n)=3n+2$. Ainsi, $u(1)=3\times1+2=5$, $u(2)=3\times2+2=8$ et $u(3)=3\times3+2=11$.

Les quatre premiers termes de cette suite sont représentés dans le graphique ci-contre.

Ils sont alignés sur la droite d'équation $y=3x+2$.



Remarque Une suite arithmétique permet de modéliser un phénomène **discret à croissance linéaire**.

Propriétés

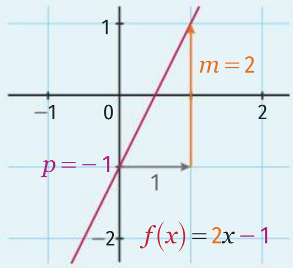
1. Une suite arithmétique u de raison r est strictement croissante si, et seulement si, $r>0$.
2. Une suite arithmétique u de raison r est strictement décroissante si, et seulement si, $r<0$.
3. Une suite arithmétique u de raison r est constante si, et seulement si, $r=0$.

2 Fonctions affines

Définition

Une fonction f est dite **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.

La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère du plan est une droite dont m est le **coefficient directeur** et p est l'**ordonnée à l'origine**. On a $p = f(0)$.



Remarque Une fonction affine permet de modéliser un phénomène **continu à croissance linéaire**.

Propriétés

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine dont on note d la droite représentative.

1. Pour tous réels distincts a et b, on a $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2. Pour tous points distincts $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ appartenant à d, on a $m = \dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}$.

Propriétés

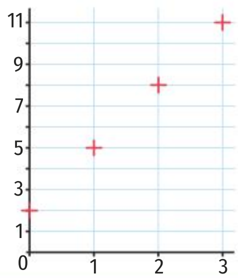
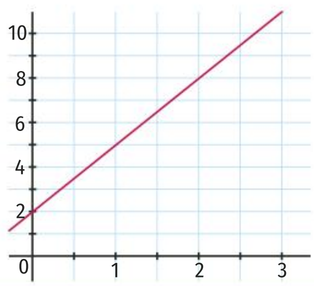
1. Une fonction affine f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m > 0$.

2. Une fonction affine f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m < 0$.

3. Une fonction affine f est constante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m = 0$.

3 Modèles linéaires discrets et continus

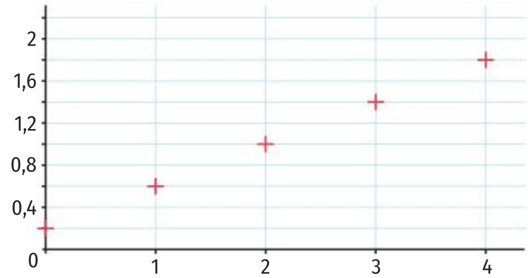
Voici un tableau récapitulatif des caractéristiques des modèles linéaires discrets et continus.

Modèle	Discret	Continu
Modélisation	Suite arithmétique u définie sur $\mathbb{N}$.	Fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$.
Expression	$u(n) = rn + u(0)$ avec $n \in \mathbb{N}$.	$f(x) = mx + p = mx + f(0)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Représentation graphique	Nuage de points alignés 	Droite 
Caractérisation	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) - u(n)$ est constant.	Pour tous réels a et b distincts, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Méthode 1 Exploiter la représentation graphique d'une suite arithmétique

Soit u une suite arithmétique dont voici la représentation graphique. Déterminer le premier terme et la raison de u.

En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de $u(n)$ en fonction de n.



Solution

D'après le graphique, le premier terme est $u(0) = 0{,}2$.

On choisit deux termes consécutifs, par exemple $u(3) = 1{,}4$ et $u(4) = 1{,}8$, puis on calcule la raison :

$r = u(4) - u(3) = 0{,}4$.

Pour tout entier naturel n, on a $u(n) = r \times n + u(0) = 0{,}4 \times n + 0{,}2$.

Méthode

- On détermine la valeur de $u(0)$.
- On calcule r en déterminant l'écart $u(n+1) - u(n)$ entre deux valeurs consécutives.
- On donne la forme explicite de la suite.

Méthode 2 Calculer les termes d'une suite arithmétique

Exemple 1. On donne une suite arithmétique u de raison $r = 3$ telle que $u(6) = -4$. Calculer le terme de rang 8.

Exemple 2. Tao possède six cartes Pokémon et décide d'agrandir sa collection. Chaque semaine, il achète trois nouvelles cartes sur un site de vente en ligne.

On note $v(n)$ le nombre de cartes Pokémon possédées par Tao après n semaines écoulées.

1. Justifier que v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme $v(0)$.

2. Calculer $v(5)$. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Solution

Exemple 1. Pour tout entier naturel n, on a $u(n+1) = u(n) + 3$.
Donc $u(7) = u(6) + 3 = -4 + 3 = -1$ et
$u(8) = u(7) + 3 = -1 + 3 = 2$.

Exemple 2.
1. D'une semaine à l'autre, le nombre de cartes Pokémon augmente de trois unités. Donc $v(n+1) = v(n) + 3$. Ainsi, la suite v est une suite arithmétique de premier terme $v(0) = 6$ et de raison $r = 3$.

2. Puisque $r = 3$ et $v(0) = 6$, pour tout entier naturel n, on a donc $v(n) = 3n + 6$, d'où $v(5) = 3 \times 5 + 6 = 21$.
Tao possédera donc 21 cartes Pokémon au bout de cinq semaines.

Méthode

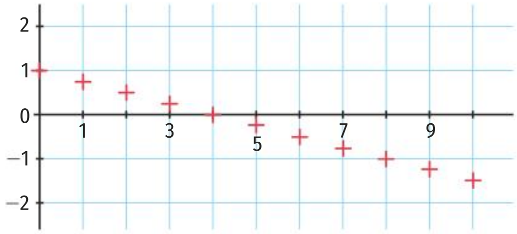
- Deux méthodes sont possibles pour calculer les termes d'une suite arithmétique.
- Cas d'une relation de récurrence.
  - On utilise la formule $u(n+1) = u(n) + r$.
  - On calcule les termes successifs pour déterminer la valeur de $u(n)$ souhaitée.
- Cas d'une forme explicite.
  - On utilise la relation : $v(n) = r \times n + v(0)$.
  - On remplace n par la valeur souhaitée.

Méthode 1

À l'oral

Pour les exercices 8 à 10

Soit u une suite arithmétique dont voici la représentation graphique.

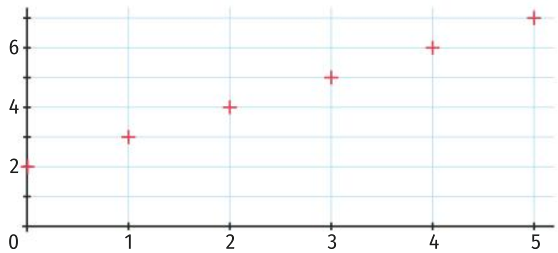


8 D'après ce graphique, la raison de cette suite est-elle positive ou négative ?

9 Déterminer le premier terme de u et justifier que sa raison est $-0{,}25$.

10 Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de $u(n)$ en fonction de n.

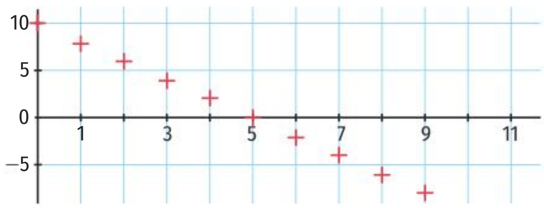
11 Soit v la suite arithmétique dont voici une représentation graphique.



1. Déterminer graphiquement le premier terme et la raison de v.

2. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de $v(n)$ en fonction de n.

12 Soit u une suite arithmétique dont voici une représentation graphique.



Déterminer graphiquement le premier terme et la raison de cette suite.

Méthode 2

À l'oral

13 Soit u la suite arithmétique définie par $u(2)=-7$ et, pour tout entier naturel n, $u(n+1)=u(n)-5$. Calculer $u(4)$.

14 Soit u une suite arithmétique de raison 4 telle que $u(3)=7$. Calculer le terme de rang 5.

15 Soit v la suite arithmétique définie, pour tout entier naturel n, par $v(n)=-3n$. Calculer le terme de rang 9 de la suite v.

16 Soit w la suite arithmétique définie, pour tout entier naturel n, par $w(n)=\frac{n}{2}-1$. Calculer le cinquième terme de w.

17 Soit v la suite arithmétique définie, pour tout entier naturel n, par $v(n)=7-6n$.

Calculer les trois premiers termes de cette suite.

18 Soit u une suite arithmétique de raison $r=0{,}25$ et de premier terme $u(0)=-3$.

Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

19 Un robinet standard débite approximativement 20 cL d'eau par seconde. On laisse le robinet ouvert et on relève la quantité d'eau écoulée chaque seconde.

1. Justifier que cette situation peut être modélisée par une suite arithmétique d dont on précisera le premier terme et la raison.

2. Calculer et interpréter $d(11)$.

20 En 2021, le village de Gordes comptait 1 649 habitants. Lors des prévisions budgétaires, le maire de ce village prévoit une augmentation de quinze nouveaux habitants par an. Pour tout entier naturel n, on note $h(n)$ le nombre d'habitants de Gordes lors de l'année $2021+n$.

1. a. Pour modéliser cette situation, on utilise une suite arithmétique. Justifier ce choix, puis préciser la raison et le premier terme $h(0)$ de cette suite.

b. Exprimer $h(n)$ en fonction de n.

2. Combien ce village comptera-t-il d'habitants en 2022 selon cette modélisation ? En 2023 ? En 2024 ? En 2030 ?

Méthode 3 Déterminer un seuil par le calcul

Soit u la suite arithmétique définie, pour tout entier naturel n, par $u(n)=5-3n$.
Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle $u(n)\leqslant -12$.

Solution

On résout l'inéquation $u(n)\leqslant -12$.
$u(n)\leqslant -12 \Leftrightarrow 5-3n\leqslant -12 \Leftrightarrow -3n\leqslant -17 \Leftrightarrow n\geqslant \frac{-17}{-3} \Leftrightarrow n\geqslant \frac{17}{3}$.
Or $\frac{17}{3}\approx 5{,}7$. Puisque n est un entier et $n\geqslant 5{,}7$, on a donc $n=6$.
La plus petite valeur de n à partir de laquelle $u(n)\leqslant -12$ est 6.
Autrement dit, à partir de $n=6$, $u(n)\leqslant -12$.

Méthode

- On résout l'inéquation demandée.
- On donne la valeur du seuil demandé en donnant un nombre entier naturel (arrondir en conséquence).

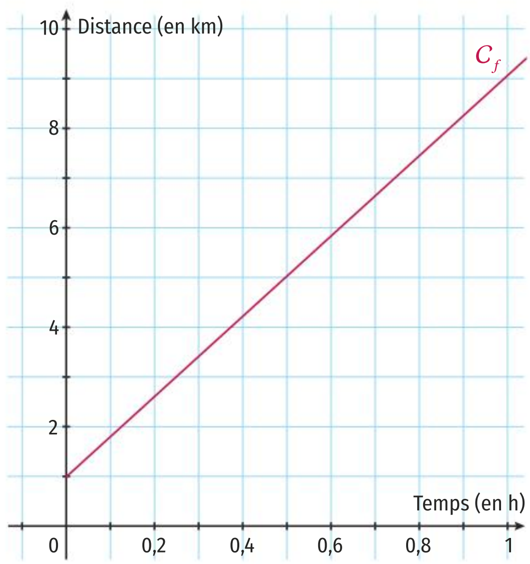
Méthode 4 Exploiter la représentation graphique d'une fonction affine

1. Soit f une fonction affine dont voici la droite représentative C_f.
D'après ce graphique, déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction du réel x.

2. Après s'être échauffée sur 1 km, Clara active son chronomètre. Elle court alors à 8 km/h et souhaite calculer sa distance totale parcourue à chaque instant. On admet que $f(x)$ est la distance totale parcourue par Clara lorsque le chronomètre indique qu'elle a couru x heures.

a. Justifier le choix de modéliser cette situation par une fonction.

b. Par lecture graphique, déterminer, en minute, le temps nécessaire à Clara pour parcourir au total 5 km.



Solution

1. Par lecture graphique, l'ordonnée à l'origine vaut $p=1$.
On considère les points $\mathrm{A}(0\,;1)$ et $\mathrm{B}(1\,;9)$ sur C_f.
On calcule le coefficient directeur : $m=\frac{9-1}{1-0}$, d'où $m=8$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(x)=8x+1$.

2. a. Le temps écoulé est un nombre réel donc on représente la situation par une fonction. Une suite ne peut pas convenir car une suite n'est définie que pour les entiers naturels.

b. Par lecture graphique, il faut 0,5 heure à Clara pour parcourir 5 km, soit 30 minutes.

Méthode

- On détermine l'ordonnée à l'origine de la droite puis on calcule le coefficient directeur à l'aide de la formule $\frac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}$ en choisissant deux points distincts de cette droite.
- On repère si la variable est un nombre réel ou un nombre entier pour savoir si on modélise la situation par une fonction ou une suite.
- On réalise une lecture graphique en repérant les grandeurs sur les bons axes.

Méthode 3

À l'oral

21 Soit u la suite arithmétique définie par $u(n) = 2n + 4$, où n est un entier naturel.

Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle $u(n) \geqslant 11$.

22 Soit u la suite arithmétique définie par $u(n) = 1 - 5n$, où n est un entier naturel.

Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle $u(n) \leqslant -18$.

23 Soit v la suite arithmétique définie par $v(n) = 3n - 5$, où n est un entier naturel.

Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle $v(n) \geqslant 57$.

24 Soit w la suite arithmétique définie par $w(n) = -4n + 8$, où n est un entier naturel.

Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle $w(n) \leqslant -106$.

25 Soit z la suite arithmétique définie par $z(0) = 3$ et, pour tout entier naturel n, $z(n+1) = z(n) + 6$.

1. Exprimer $z(n)$ en fonction de n, pour tout entier naturel n.

2. Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle $z(n) \geqslant 327$.

26 Soit u la suite arithmétique définie, pour tout entier naturel n, par $u(n) = -n\sqrt{2} + 3$.

Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle $u(n) \leqslant -6$.

27 Un robinet standard débite approximativement 20 cL d'eau par seconde. On laisse le robinet ouvert. Calculer le nombre minimal de secondes qu'il faut attendre pour remplir une bouteille de 1,5 L.

28 Hawa veut finir de remplir sa piscine de 50 m^3. Sa piscine contient déjà 4 m^3 et se remplit avec un débit de 1,5 m^3/h. Le volume d'eau dans la piscine au bout de n heures est donc modélisé par la suite arithmétique u d'expression $u(n) = 1{,}5n + 4$.

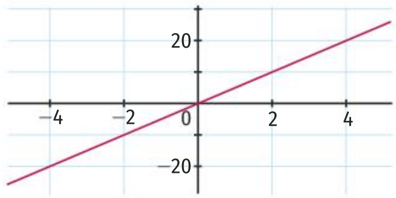
Au bout de combien d'heures la piscine de Hawa sera-t-elle remplie ?

Méthode 4

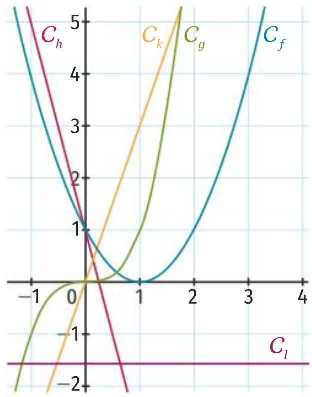
À l'oral

29 Soit f une fonction affine dont voici la représentation graphique.

Exprimer $f(x)$ en fonction du réel x.

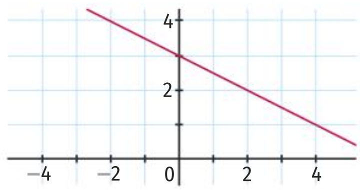


30 Parmi les représentations graphiques suivantes, lesquelles représentent des modèles continus à croissance linéaire ? Justifier.

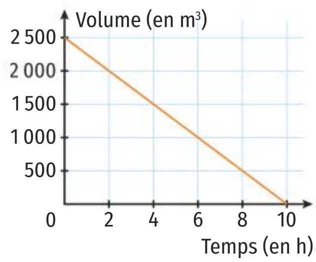


31 Soit h une fonction affine dont on donne la représentation graphique suivante.

Déterminer par lecture graphique $h(2)$ et $h(4)$.



32 Une piscine est remplie avec 2 500 m^3 d'eau. Pour la réparer, on la vide complètement. La fonction V qui donne le volume d'eau en fonction du temps est représentée ci-dessous.



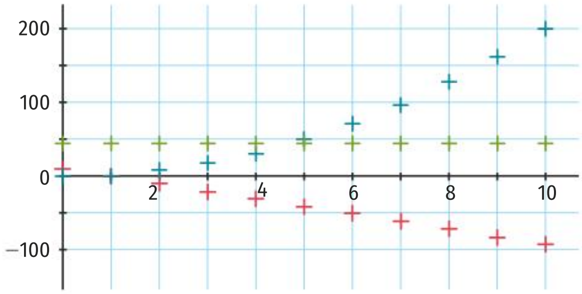
1. Justifier le choix de modéliser cette situation par une fonction.

2. Combien de temps faut-il pour vider 1000 m^3 ?

1 Suites arithmétiques

33

Parmi les représentations graphiques suivantes, lesquelles représentent des modèles discrets à croissance linéaire ? Justifier.



34

À la salle de sport, un adhérent charge sa barre de squat, qui pèse 20 kg, avec 40 kg de poids de chaque côté pour sa première série. Pour les séries suivantes, il baisse la charge de son équipement qui pèse alors 90 kg, puis 80 kg, puis 70 kg, etc. Peut-on modéliser cette situation par une suite arithmétique ?

35

La réserve de noisettes d'un écureuil diminue chaque jour de l'hiver. Elle débute à 156 noisettes, puis atteint 122 noisettes au bout d'un mois, 86 au bout de 2 mois. Sur la durée de l'hiver, peut-on modéliser cette situation par une suite arithmétique ? Justifier.

36

Parmi les deux suites suivantes, retrouver celle qui modélise un phénomène à croissance linéaire en justifiant. Préciser son sens de variation.

1. $u(n) = 2n^2 - 1$ **2.** $v(n) = \frac{n+2}{3}$

37

Les situations suivantes sont à croissance linéaire.

1. Dans un élevage de chèvres, la population au cours de quatre mois consécutifs s'élève à 76, puis 70, puis 64, puis 58 chèvres.
Combien y a-t-il de chèvres le mois suivant ?

2. La quantité d'eau dans un pluviomètre lors d'un orage est relevée toutes les dix minutes. Les valeurs relevées sont 15 mm ; 19 mm ; 23 mm ; 27 mm.
Quelle valeur est relevée dix minutes plus tard ?

38

Préciser la raison de chacune des suites arithmétiques suivantes dont on donne les premiers termes. Indiquer le sens de variation de cette suite.

1. 0,2 ; −0,2 ; −0,6 ; etc. **2.** $\frac{3}{5}$; 1 ; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{5}$; etc.

39

Pour chacune de ces suites arithmétiques définies sur $\mathbb{N}$, calculer $u(10)$.

1. $u(n) = 5n - 12$ **2.** $u(n) = \frac{4n+7}{3}$

40

Soit u la suite arithmétique définie par $u(1) = 0{,}2$ et, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n) + 0{,}1$.
Déterminer $u(4)$, puis le sens de variation de u.

41

On donne les premiers termes d'une suite arithmétique : $\frac{13}{4}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{4}$; 1 ; $\frac{1}{4}$.
Calculer les deux termes suivants.

42

Soit u la suite arithmétique de raison $r = 3$ telle que $u(6) = -4$. Calculer $u(8)$.

43

Dans chaque cas, u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u(0)$. Calculer le terme de rang 5.

1. $r = -7$ et $u(0) = 3$. **2.** $r = -1{,}2$ et $u(0) = 5{,}6$.

44

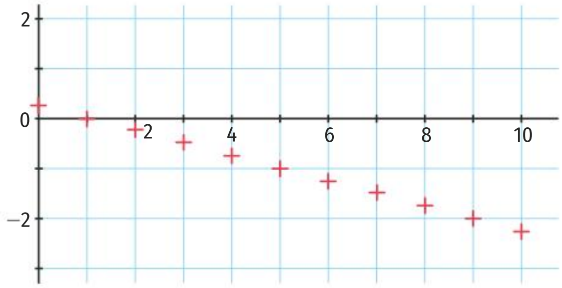
Dans un repère du plan, tracer le nuage des cinq premiers points des suites arithmétiques suivantes.

1. $u(n) = 2 - 5n$ où $n \in \mathbb{N}$.

2. $w(0) = 3$ et $w(n+1) = w(n) - 2$ où $n \in \mathbb{N}$.

45

Soit u une suite arithmétique dont on donne la représentation graphique.



Exprimer, pour tout entier naturel n, $u(n)$ en fonction de n.

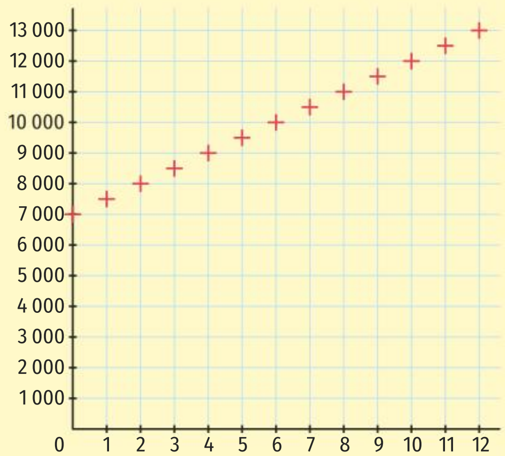
46 Copie d'élève

Un couple avec deux enfants a dépensé 7 000 € en 2021 pour l'alimentation.
Chaque année, cette dépense augmente de 500 €.
Le professeur demande à Edgar de déterminer l'année à partir de laquelle cette dépense sera supérieure à 9 600 €.

Voici la copie d'Edgar.

Je note $u(n)$ le montant dépensé chaque année à partir de 2021.

La suite u est arithmétique, on a $u(n+1) = u(n) + 500$. Voici le nuage de points de la suite u.



On peut lire graphiquement que la réponse est 7 ans.

Le raisonnement d'Edgar est erroné. Proposer une correction.

47 Fil rouge

Lorsque l'on pratique la plongée sous-marine en loisir, il faut faire attention à ne pas remonter trop vite à la surface. La vitesse de remontée préconisée est depuis plusieurs dizaines d'années établie à 10 m/min.

Carine, plongeuse consciencieuse, respecte rigoureusement la vitesse préconisée à chaque instant pendant sa remontée. On note $d(n)$ la distance parcourue pendant la remontée, où n représente le nombre de minutes écoulées.

1. Donner la nature de la suite d en précisant ses caractéristiques.

2. Calculer et interpréter $d(3)$.

3. Carine a plongé à 60 mètres de profondeur. Combien de minutes durera sa remontée à la surface ?

48 En SES

Guillaume décide de faire un placement à intérêts simples afin de prévoir l'achat d'une moto à 13 000 €. Il place 9 500 € en janvier 2022.

À chaque début de mois, son capital est augmenté de 1,1 % du montant initial.

On note $p(n)$ le montant de son placement au bout de n mois après le 1er janvier 2022.

On a donc $p(0) = 9\,500$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n :

$$p(n) = 104{,}5n + 9\,500.$$

2. **a.** Déterminer la plus petite valeur de n telle que $p(n) \geqslant 13\,000$.

b. À partir de quelle date Guillaume pourra-t-il acheter sa moto ? Justifier.

49 En SES

Maggie emprunte 50 € à son meilleur ami Axel.

Pour le rembourser, elle décide de lui donner 10 € le lundi suivant, puis, chaque lundi, de lui donner 2 €.

1. Justifier que cette situation est modélisée par une suite arithmétique.

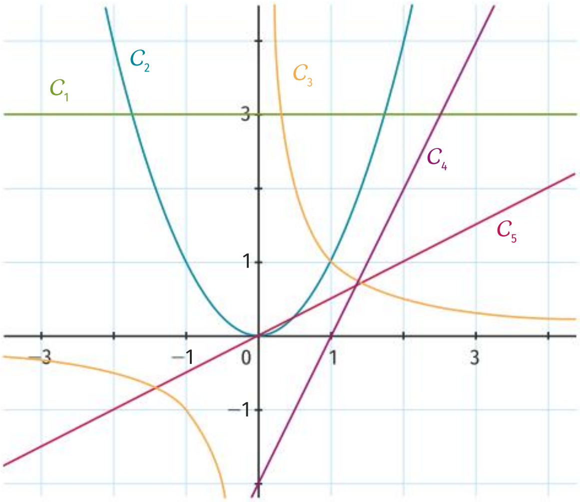
2. Quelle somme Maggie aura-t-elle remboursée au bout de quatre semaines après son versement de 10 € ?

3. Au bout de combien de temps Maggie aura-t-elle remboursé Axel intégralement ?

2 Fonctions affines

50

Parmi les représentations graphiques suivantes, lesquelles représentent des modèles continus à croissance linéaire ?
Déterminer alors leur expression.



51

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles modélisent un phénomène à croissance linéaire ? Justifier et préciser leur sens de variation.

1. $f(x) = 5x^2 + 9$
2. $g(x) = 5x(7 - 5x)$
3. $h(x) = \dfrac{3x+5}{4}$
4. $i(x) = (x+2)^2 - x^2$

52 Fil rouge

La pression de l'eau sur un plongeur se calcule à l'aide de la formule $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{S}}$, où P est la pression, en pascal (Pa), F est la force de pression exercée, en newton (N) et S, la surface corporelle, en m².

1. La pression de l'eau définit-elle une croissance linéaire en fonction de F ou de S ? Justifier.
2. La surface corporelle moyenne d'un humain adulte est de 1,73 m².

a. Calculer la pression de l'eau sur un plongeur lorsque la force vaut 2,595 N.

b. Calculer la force de pression exercée sur un plongeur lorsque la pression est de 1 bar, soit 10^5 Pa.

53 Environnement

1. Un chewing-gum pèse en moyenne 2,5 g. Il faut environ cinq années pour qu'un chewing-gum se décompose intégralement. On note $c(t)$ la masse du chewing-gum en gramme en fonction du temps t en année à partir du début de la décomposition.

On admet que c décroît linéairement.

a. Justifier que, pour tout réel positif t, $c(t) = 2{,}5 - 0{,}5t$.

b. Calculer $c(1{,}75)$ et interpréter le résultat.

c. Combien de temps faut-il attendre pour que le chewing-gum perde 90 % de sa masse initiale ?

2. Un mégot de cigarette pèse en moyenne 220 mg. Dans le meilleur des cas, il faut une année de 365 jours pour qu'un mégot se décompose intégralement. On suppose de nouveau que la décomposition est linéaire. On note $m(t)$ la masse du mégot, en milligramme, en fonction du temps t, en année, à partir du début de la décomposition.

a. Justifier que $m(t) = 220 - 220t$.

b. Calculer et interpréter $m(0{,}75)$.

c. Un mégot est en décomposition depuis le 1er janvier d'une année non bissextile. Quelle est sa masse le 14 mars ?

54 Exercice inversé

Le niveau moyen des océans a augmenté de 20 mm entre 1993 et 2000.
Proposer l'énoncé d'un problème dont les réponses sont les suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{20}{7}x - \dfrac{60}{7}$
2. Cette augmentation correspond à celle entre 1993 et 2042.

55

La température $f(x)$ en degré Fahrenheit (°F) en fonction de la température x en °C vérifie une croissance linéaire telle que $f(37) = 98{,}6$ et $f(100) = 212$.

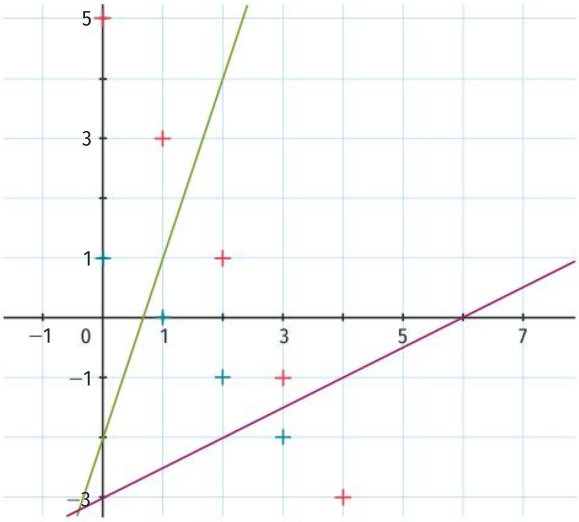
1. Déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la représentation graphique de f, puis en déduire l'expression de f.
2. **a.** Convertir 107,6 °F en °C.

b. Déterminer l'expression de la température en °C en fonction de celle en °F. Obtient-on une fonction affine ? Justifier.

3 Modèles discrets et continus

56

Parmi les quatre représentations graphiques suivantes, lesquelles représentent des modèles à croissance linéaire discrets ? Continus ?



57

Les expressions suivantes représentent-elles des modèles à croissance linéaire discrets ou continus ? Justifier.

1. $g(x) = 7\sqrt{2}x + 1$ avec $x \in \mathbb{R}$.
2. $v(n) = 3 - 8n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

58

Modéliser chaque situation à l'aide d'une fonction ou d'une suite, en précisant leur expression.

1. Le prix du carburant dans une station-service de Charente s'élève à 2,014 € le litre. On note P le prix à payer, en euro, en fonction de la quantité de carburant achetée, en litre.
2. Dans un camping du Morvan, la connexion au réseau wifi se paie à la journée en fonction du nombre d'appareils connectés, soit 3,50 € par appareil connecté, auxquels on ajoute un forfait fixe de 1,50 €.

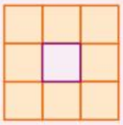
59 *Fil rouge*

On note $f(x)$ la pression de l'eau, exprimée en bar, sur un plongeur, en fonction de sa profondeur x, exprimée en mètre. On note aussi $u(n)$, la profondeur, exprimée en mètre, en fonction du n-ième palier de décompression à effectuer.
f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 0{,}1x + 1$ et u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u(n) = 3n$.

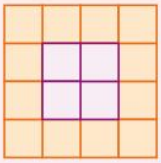
f et u modélisent-elles des phénomènes à croissance linéaire ? Ces derniers sont-ils discrets ou continus ?

Défis !

60 Un carreleur construit des mosaïques de différentes tailles. Celle de taille 1 est constituée d'un carré central de côté 0,5 cm bordé de huit carrés de même dimension. Celle de taille 2 possède quatre carrés centraux bordés de carrés autour, celle de taille 3 possède 9 carrés centraux bordés de carrés autour et ainsi de suite.



Taille 1



Taille 2

Quel est le périmètre total d'une mosaïque de taille 5 ? Justifier.

61 Le prix P d'un climatiseur mobile vendu par l'entreprise Ilféfrai dépend de l'offre et de la demande de celui-ci. Le prix unitaire, en euro, en fonction de la quantité x est modélisé par une croissance linéaire continue. Le prix unitaire pour 500 climatiseurs est de 390 € pour répondre à la demande et de 200 € selon l'offre. Le prix unitaire pour 1500 climatiseurs est de 250 € pour répondre à la demande et de 550 € selon l'offre.

Le point d'équilibre correspond au prix identique pour la même quantité selon l'offre et la demande.

Déterminer le point d'équilibre pour ces climatiseurs mobiles.

Remarque Cette double-page permet d'approfondir les notions de ce chapitre et de travailler de façon différenciée avec les élèves de la classe, notamment avec les plus à l'aise en mathématiques ou bien avec celles et ceux qui souhaiteraient choisir l'option mathématiques complémentaires en terminale.

Cours

Terme général d'une suite arithmétique

Notations On considère une suite u.

- Pour tout entier naturel n, le terme $u(n)$ d'une suite u est noté u_n et on note (u_n) la suite u.
- Une suite **arithmétique** u de raison r vérifie pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$.

Propriétés

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \times r + u_0$.

2. Pour tous entiers naturels n et p, $u_n = (n-p) \times r + u_p$.

Exemple

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = -2$ telle que $u_5 = 7$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = (n-5) \times r + u_5$, soit $u_n = -2(n-5) + 7 = -2n + 17$.

On en déduit que $u_0 = -2 \times 0 + 17 = 17$.

62 Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 4$.

Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

63 Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - n\sqrt{2}$.

Calculer $u_{n+1} - u_n$.

64 Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$.

Exprimer u_{n+3} en fonction de u_n.

65 Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = \frac{3}{5}$ telle que $u_4 = -\frac{2}{5}$.

Calculer les termes de rang 9 et de rang 2 de cette suite.

66 Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_2 = 3$ et $u_{12} = -1$.

Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de cette suite.

67 Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20}.

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_7 = 12$.

2. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et telle que $u_{25} = 17$.

3. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

68 Kalyam place une somme d'argent u_0 au taux simple annuel de 5 % ; c'est-à-dire que chaque année, la somme placée augmentera de 5 % de la somme initiale. Pour tout entier naturel n, u_n désigne le capital de Kalyam n années après son placement.

1. Déterminer u_1 et u_2 en fonction de u_0.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de u_0.

3. En justifiant, déterminer une expression de u_n en fonction de n et de u_0.

4. Cinq ans après avoir placé son argent, Kalyam possède 1 250 €. Quelle somme d'argent avait-il placé au départ ?

69 Dans le jardin de Yoann, se trouve un puits de 15,7 m de profondeur. Toutes les heures, il creuse 1,2 m. On note u_n la profondeur du puits au bout de n heures.

1. Justifier que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

2. Résoudre $u_n \geqslant 30$. Interpréter ce résultat.

3. Reproduire et compléter le programme Python ci-dessous afin de retrouver le résultat obtenu à la question **2**.

```
def seuil() :
    u = 15.7
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = ...
        return(n)
```

70 On donne ci-dessous un programme rédigé à l'aide de Python.

```
def suite():
    u = 3
    n = 0
    while u < 150 :
        n = n + 1
        u = u + 2/9
    return(n)
```

1. Ce programme est associé à une suite arithmétique (u_n). Préciser la raison r et le premier terme u_0 de cette suite.

2. a. Quel est l'objectif de ce programme ?

b. Exprimer u_n en fonction de n.

c. En déduire la valeur affichée en sortie du programme.

71 Rayane loue un appartement à Bordeaux. Son contrat de location débute le 1er juin 2022 avec un loyer de 503 € qui augmente ensuite de 32 € tous les ans. On note u_n le loyer de l'appartement de Rayane, en euro, au bout de n années après le 1er juin 2022. On a donc $u_0 = 503$.

1. On admet que (u_n) est une suite arithmétique. Donner la raison r de cette suite.

2. Quel loyer Rayane devra-t-il payer au 1er juin 2029 ?

3. Afin d'y voir plus clair dans ses dépenses, Rayane réalise la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C
1	n	$u(n)$	Somme
2	0	503	6 036
3	1	535	12 456
4	2	567	19 260
5	3	599	26 448
6	4	631	34 020
7	5	663	41 976

a. Quelle formule Rayane a-t-il entrée dans la cellule **B3** puis étirée vers le bas pour remplir automatiquement la colonne **B** ?

b. Sachant que $6\,036 = 503 \times 12$, à quoi correspond la valeur calculée dans la cellule **C2** ?

c. À quoi correspond la valeur dans la cellule **C3** ? Comment a-t-elle été calculée ?

72 On souhaite démontrer la propriété suivante : « Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tous entiers naturels n et p, $u_n = (n-p)r + u_p$ ».

1. Rappeler l'expression de u_n en fonction de u_0, de n et de r.

2. Exprimer de même u_p en fonction de u_0, de p et de r.

3. En déduire une expression de u_0 en fonction de u_p, de p et de r.

4. Conclure.

73 La suite (v_n) est une suite arithmétique dont on a calculé les termes à l'aide d'un tableur.

	A	B
1	n	$v(n)$
9	8	130
10	9	144
11	10	158
12	11	172
13	12	186
14	13	200
15	14	214
16	15	228
17	16	242

1. Déterminer la raison de la suite (v_n).

2. Calculer le premier terme v_0.

3. Calculer v_{20} de deux façons différentes.

Impôts sur le revenu

Doc. 1 Informations sur la famille Pairon

La famille Pairon a deux enfants.
En 2021, le premier parent a gagné 2 150 € imposables par mois et le second 2 270 €, auxquels se sont ajoutés 1 500 € de prime annuelle imposable.

Doc. 2 Nombre de parts et quotient familial

Selon le nombre d'enfants, la **part fiscale** de la famille n'est pas la même. Pour obtenir le **quotient familial**, qui sert à calculer le montant de l'impôt sur le revenu, on divise le revenu total imposable par le nombre de parts.

Nombre de parts de quotient familial pour un couple soumis à déclaration commune

Nombre d'enfant(s)	Nombre de parts
0	2
1	2,5
2	3
3	4
4	5
Par enfant supplémentaire	1

Doc. 3 Barème d'imposition

Barème progressif applicable aux revenus de 2021

Tranches	Taux d'imposition à appliquer sur la tranche correspondante (ou tranche marginale d'imposition)
Jusqu'à 10 225 €	0 %
De 10 226 € à 26 070 €	11 %
De 26 071 € à 74 545 €	30 %
De 74 546 € à 160 336 €	41 %
Plus de 160 336 €	45 %

Doc. 4 Exemple de calcul

Pour un couple marié ou pacsé sans enfants (foyer de 2 parts) ayant perçu un revenu net imposable de 60 000 €.
Son quotient familial est de 60 000 € ÷ 2 = 30 000 €. Pour le calcul de son impôt :

- jusqu'à 10 225 € : 0 % ;
- de 10 226 € à 26 070 € : $(26\,070\,€ - 10\,225\,€) \times 11\,\% = 15\,845\,€ \times 11\,\% = 1742{,}95\,€$;
- de 26 071 € à 30 000 € : $(30\,000\,€ - 26\,070\,€) \times 30\,\% = 3\,930\,€ \times 30\,\% = 1179\,€$.

L'impôt brut de chaque membre du couple est de : $0\,€ + 1\,742{,}95\,€ + 1\,179\,€ = 2\,921{,}95\,€$.
Cet impôt doit ensuite être multiplié par le nombre de parts du foyer fiscal. Dans cet exemple, il sera multiplié par 2 puisqu'il s'agit d'un couple marié ou pacsé. Le couple devra donc payer un impôt de $2\,921{,}95\,€ \times 2$, soit 5 843,90 €.

Questions

1 **a.** Montrer que pour l'année 2021, la famille Pairon va payer 2 625,15 € d'impôt sur le revenu.

b. Quelle est la proportion de l'impôt payé par rapport aux revenus totaux ? Cette proportion s'appelle le **taux d'imposition moyen.**

2 En 2022, les revenus de la famille Pairon ont beaucoup augmenté. Le premier parent a gagné 3 000 € imposables par mois et le second 3 300 €. De plus, une prime annuelle de 6 300 € s'est ajoutée à ces revenus imposables.

a. Calculer le montant de l'impôt sur le revenu que la famille Pairon devra payer pour l'année 2022.

b. En déduire le taux d'imposition moyen.

Fil rouge du chapitre

1 La pression de l'eau dans les profondeurs marines

Sujet : La plongée sous-marine, pour des raisons scientifiques ou pour le loisir, est une activité encore très récente. La pression exercée par l'eau sur les plongeurs, leurs instruments ou sur les véhicules sous-marins est une contrainte qu'il faut savoir maîtriser et anticiper. Les fonds marins sont donc encore peu connus.

Pourquoi les abysses sont-ils des zones de la Terre aussi peu explorées ?

Pistes de recherche :

- Rechercher ce qu'est la pression exercée par l'eau sur un plongeur, puis sur un sous-marin.
- Quelles sont les conséquences de cette pression sur le plongeur ? Sur le sous-marin ?
- Comment gérer ce phénomène à l'aide des paliers de décompression ?
- Qu'est-ce que la fosse des Mariannes ?
- À combien estime-t-on le nombre d'espèces aquatiques encore inconnues à ce jour ?

Fil rouge :

- Activité C p. 71
- Ex. 47 p. 79
- Ex. 52 p. 80
- Ex. 59 p. 81

CONSEILS POUR LA PRÉPARATION

- Répéter plusieurs fois son exposé chez soi.
- Anticiper les questions qu'on pourra nous poser.
- Expliquer les choses très simplement.

2 La tour Eiffel grandit-elle ?

Sujet : Chaque année, on constate que la tour Eiffel grandit en été de quelques centimètres et rétrécit en hiver. Ce phénomène est courant avec d'autres structures métalliques. D'ailleurs, le métal n'est pas le seul matériau à être sensible aux changements de température.

Comment la science explique-t-elle ce phénomène ?

Pistes de recherche :

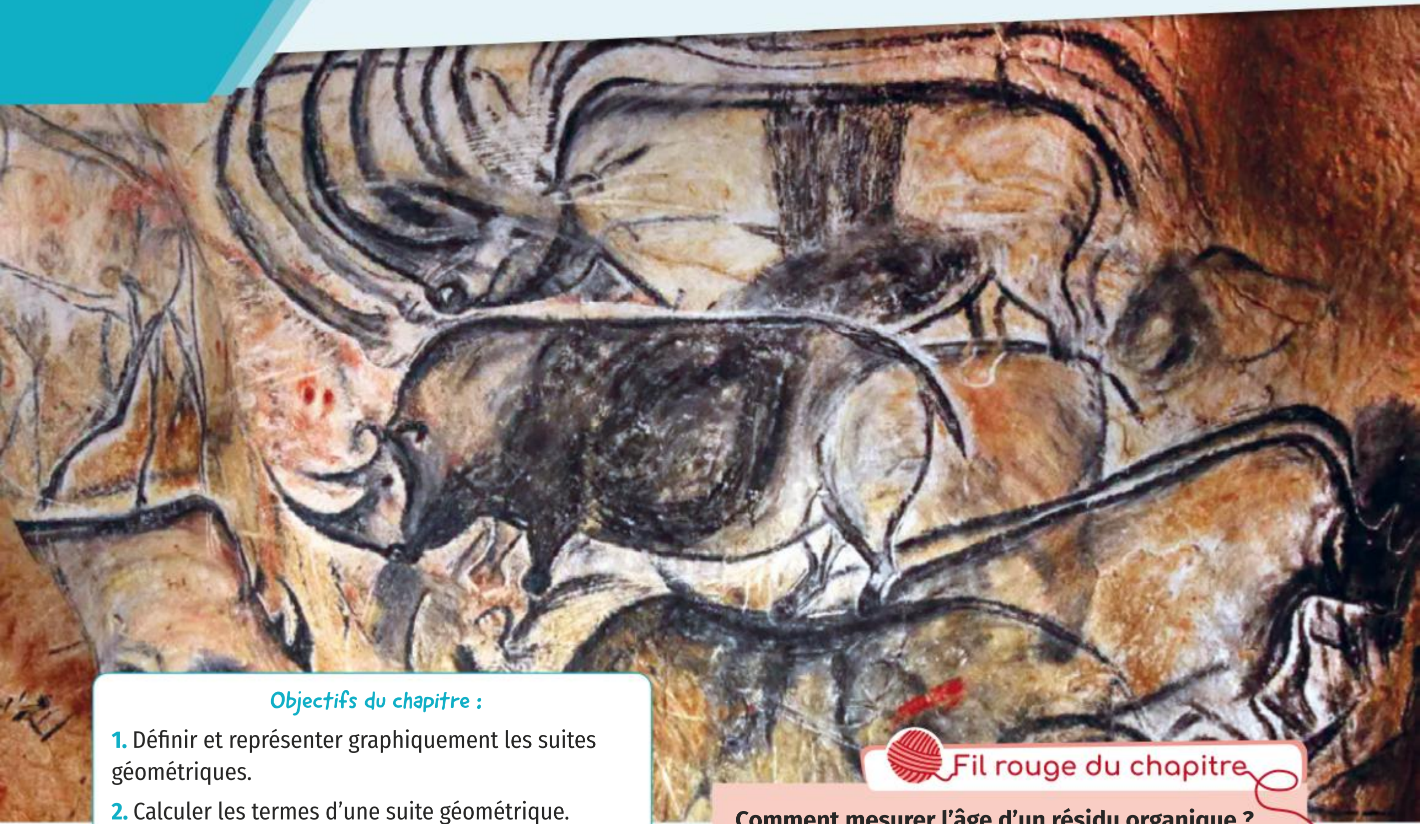
- Rechercher qui est Gustave Eiffel.
- Qu'est-ce que la dilatation thermique ? Est-ce un phénomène à croissance linéaire ? Qu'est-ce que le coefficient de dilatation ?
- Quels sont les problèmes que ce phénomène pourrait engendrer sur d'autres structures ?

CONSEILS POUR L'ORAL

- Être souriant(e) et paraître détendu(e).
- Avoir une tenue vestimentaire adaptée.
- Rester courtois(e) vis-à-vis de son auditoire.

Chapitre 4

Croissance exponentielle



Objectifs du chapitre :

1. Définir et représenter graphiquement les suites géométriques.
2. Calculer les termes d'une suite géométrique.
3. Utiliser les fonctions exponentielles.
4. Déterminer le sens de variation des suites géométriques et des fonctions exponentielles.

Fil rouge du chapitre

Comment mesurer l'âge d'un résidu organique ?

Exercices rituels

1 Vrai ou faux ? Justifier.

1. $3^2 = 2^3$ **2.** $2^4 = 4^2$ **3.** $5^3 = 3^5$

2 Montrer que $3^4 - 4^3 = 2^4 + 1$.

3 Compléter par les trois termes suivants la suite des puissances de 2 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; ...

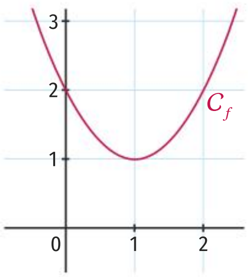
4 Combien de fois faut-il diviser 1000 par deux pour obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ?

5 On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique C_f ci-dessous.

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

2. Déterminer si possible les antécédents de 0, de 1 et de 2 par f.



D'autres exercices rituels p. 10 ou sur LLS.fr/EM1Rituels

A Étude d'un placement bancaire

Objectif **Introduire la notion de suite géométrique.**

Le 1er janvier 2016, les parents de Lou ouvrent un livret A pour leur fille et y déposent la somme de 100 €. Par la suite, ils laissent cette somme sur le livret bancaire de Lou sans ajouter d'argent.

Doc. 1 Intérêts composés

Lors d'un placement bancaire et notamment sur les livrets d'épargne usuels (livret A, CEL, LDDS, etc.), les intérêts sont souvent des **intérêts composés** dont le taux est réglementé par le ministère des Finances.

Si une personne ouvre un livret d'épargne avec un taux de rémunération fixé à t %, et dépose une somme d'argent sans jamais ni ajouter d'argent ni en enlever par la suite, alors, chaque année, la somme présente sur le compte augmente de t %.

Doc. 2 Rémunération du livret A

Date	Taux de rémunération
1er août 2011	2,25 %
1er février 2013	1,75 %
1er août 2013	1,25 %
1er août 2014	1,00 %
Du 1er août 2015 au 31 janvier 2020	0,75 %
1er février 2020	0,50 %
1er février 2022	1,00 %

Remarque

En réalité, les intérêts sont calculés en prenant en compte tous les mouvements bancaires (ajout ou retrait d'argent) deux fois par mois : au 1er et au 15 de chaque mois. Si une personne dépose de l'argent au 1er juillet, elle percevra en fin d'année les intérêts calculés sur cette somme uniquement sur la moitié de l'année.

Questions

1. Lors de l'ouverture du livret bancaire de Lou, quel était le taux de rémunération du livret A ?
2. De quelle somme Lou disposait-elle sur son compte au 1er janvier 2017 ?
3. Si n est un entier naturel compris entre 0 et 4, on note $u(n)$ la somme détenue par Lou sur son livret A au 1er janvier de l'année $2016+n$
   a. Que vaut $u(0)$?
   b. Interpréter le nombre $u(1)$. Combien vaut-il ?
   c. Compléter l'égalité suivante : $u(1)=u(0)\times \ldots$.
   d. Compléter l'égalité suivante : $u(2)=u(1)\times \ldots$.
4. Les termes calculés précédemment correspondent aux termes d'une suite **géométrique** de raison 1,075. Compléter l'égalité suivante : pour tout entier naturel n compris entre 0 et 4, $u(n+1)=u(n)\times \ldots$.
5. Quelles sont les limites du modèle utilisé dans la question précédente ?

Aide

2 Augmenter une quantité de t % revient à la multiplier par $1+\frac{t}{100}$.
Diminuer une quantité de t % revient à la multiplier par $1-\frac{t}{100}$.
Dans les deux cas, ce nombre par lequel on multiplie est appelé **coefficient multiplicateur**.

Bilan

Comment définir une suite géométrique de raison q et de premier terme $u(0)$?

B Injection de médicaments

Objectif **Représenter graphiquement une suite géométrique et conjecturer son sens de variation.**

On applique un traitement à une personne dont la masse corporelle est de 60 kg.

Doc. 1 Notice de médicament

FRÉQUENCE D'ADMINISTRATION :
1 fois par semaine le même jour.

POSOLOGIE :
5 µg/kg le premier jour puis augmenter la dose de 5 % à chaque prise.

DOSE MAXIMALE :
Ne jamais dépasser 10 µg/kg.

Doc. 2

Après chaque injection, la quantité de médicament disparaît progressivement dans le corps du patient. Chaque heure, la quantité de médicament dans le sang du patient baisse de 20 %. On considère que le médicament a totalement disparu quand il reste moins de 1 % de la quantité de médicament initialement injectée.

Doc. 3 Dose de médicament administrée à chaque injection

	A	B	C	D
1	Numéro de l'injection	1	2	3
2	Dose administrée en µg à chaque injection	300		

Aide

Le symbole µ se lit « micro » et représente une multiplication de l'unité par 10^{-6}.

Questions

1. Justifier que le volume de la dose administrée en fonction de la semaine peut être modélisé par une suite géométrique que l'on nommera u. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule **C2** de la feuille de calcul du **doc. 3**, puis faire glisser sur la droite, pour pouvoir calculer la dose administrée à chaque injection ?
3. Représenter graphiquement la quantité de médicament injectée au patient pendant huit injections. On notera le numéro de l'injection en abscisse et la dose administrée en µg en ordonnée.
4. Justifier, en utilisant le **doc. 1**, que la suite u est croissante.
5. Pour tout entier naturel n, on note $v(n)$ la quantité de médicament dans le sang du patient, en µg, n heures après la première injection. Justifier, en utilisant le **doc. 2**, que v est une suite géométrique. Préciser sa raison.
6. Utiliser un tableur pour visualiser que v est décroissante.
7. À l'aide d'un graphique similaire à celui de la question 3, représenter graphiquement la suite v.

Bilan

Comment représenter graphiquement une suite géométrique ? Comment déterminer le sens de variation d'une suite géométrique de premier terme $u(0) > 0$ et de raison $q > 0$? Conjecturer un lien entre les variations d'une suite géométrique et sa raison.

C Datation au carbone 14 *Fil rouge*

Objectif **Découvrir les fonctions exponentielles à partir des suites géométriques.**

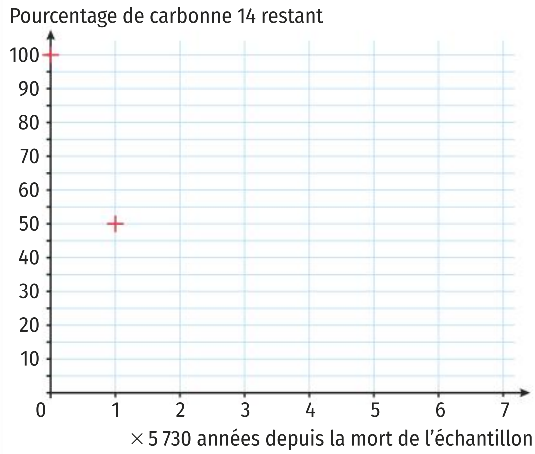
Doc. 1 Le principe de la datation au carbone 14

Les atomes de carbone 14 ont la propriété d'être radioactifs et de se décomposer à un rythme prévisible. Comme tout atome de carbone, le carbone 14 se combine avec l'oxygène de notre atmosphère pour former du CO_2 (dioxyde de carbone).

Ce CO_2 est assimilé par les organismes vivants tout au long de leur vie : respiration, alimentation, etc.
En mourant, ils n'en assimilent plus.

La quantité de carbone radioactif diminue de moitié tous les 5 730 ans. Seuls des éléments datant de moins de 50 000 ans au maximum (soit environ huit périodes) présentant une quantité mesurable peuvent être datés. Attention, c'est la date de mort de la cellule de la plante ou de l'animal qui est mesurée et non celle de sa naissance.

Doc. 2 Représentation graphique à compléter



Document à télécharger sur **LLS.fr/EM1Carbone14**.

Doc. 3 Algorithme de complétion du graphique

Choisir deux points consécutifs du graphique $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.
Placer le point $C\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\sqrt{y_A\times y_B}\right)$.

Questions

1 À l'aide du **doc. 1**, justifier que la proportion (en pourcentage) de carbone 14 dans un organisme mort depuis $5\,730\times n$ années peut être modélisée par une suite géométrique $c(n)$ de premier terme 100 % de raison $\frac{1}{2}$.

2 Sur le **doc. 2**, on a représenté graphiquement $c(0)$ et $c(1)$. Recopier ce graphique et placer $c(2)$, $c(3)$ et $c(4)$.

3 D'après le **doc. 1**, à partir de quelle valeur de n la datation au carbone 14 n'est-elle plus valable ?

4 On considère les points $A(0\,;c(0))$ et $B(1\,;c(1))$.

a. Construire le point C en utilisant l'algorithme du **doc. 3**.

b. En utilisant le point $B(1\,;c(1))$ et le point $D(2\,;c(2))$, construire le point E en utilisant de nouveau l'algorithme.

c. Continuer de placer de nouveaux points intermédiaires en utilisant les points placés lors de la question **2**.

5 À l'aide de la calculatrice ou de GeoGebra, vérifier que la représentation graphique de la fonction définie pour tout $x \geqslant 0$ par $f(x)=100\times 0{,}5^x$ contient approximativement les points du nuage construit dans la question **4**.

Bilan

Comment sommes-nous passés du modèle discret au modèle continu ? À l'aide des connaissances sur les suites géométriques, conjecturer les variations de la fonction $x\mapsto q^x$ avec $q>0$ sur $[0\,;+\infty[$.

1 Suites géométriques

A Définition

Définition

Une suite u est géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q, nommé raison, tel que pour tout entier naturel n : $u(n+1) = q \times u(n)$.

Remarque Dans ce chapitre, on se limite au cas où $u(0) > 0$ et $q > 0$.

Exemple

La suite u définie par $u(0) = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = 0{,}5 \times u(n)$ est une suite géométrique de premier terme 8 et de raison $q = 0{,}5$.

On a $u(0) = 8$, $u(1) = 0{,}5 \times u(0) = 4$, $u(2) = 0{,}5 \times u(1) = 2$, etc.

Propriété

Si u est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u(0)$, alors pour tout entier naturel n :

$$u(n) = u(0) \times q^n.$$

Exemple

Soit u la suite géométrique définie par $u(0) = 10$ et vérifiant, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = 8 \times u(n)$.
On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u(n) = 10 \times 8^n$.

B Sens de variation d'une suite géométrique

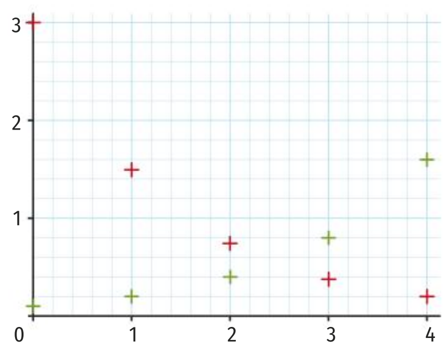
Propriété

Une suite géométrique u de premier terme $u(0) > 0$ et de raison $q > 0$ est :

- strictement croissante si, et seulement si, $q > 1$;
- strictement décroissante si, et seulement si, $0 < q < 1$;
- constante si, et seulement si, $q = 1$.

Exemple

- **En rouge** : Nuage de points associé à la suite géométrique u de premier terme $u(0) = 3$ et de raison $q = 0{,}5$.
  On a $0 < 0{,}5 < 1$ donc la suite u est décroissante.
  Cela se vérifie avec les premiers termes : $u(0) = 3$, $u(1) = 1{,}5$, $u(2) = 0{,}75$, etc.
- **En vert** : Nuage de points associé à la suite géométrique v de premier terme $v(0) = 0{,}1$ et de raison $q = 2$.
  Ici, on a $2 > 1$ donc la suite v est croissante.
  Cela se vérifie avec les premiers termes : $v(0) = 0{,}1$, $v(1) = 0{,}2$, $v(2) = 0{,}4$, etc.



2 Fonctions exponentielles

A Définition et variations

Définition

Soit a un réel strictement positif. Une fonction f définie pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$ par $f(x)=a^x$ est une **fonction exponentielle**.

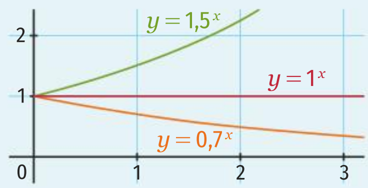
Propriétés

Une fonction exponentielle f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=a^x$ avec $a>0$ est :

1. strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $a>1$;

2. strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $0<a<1$;

3. constante sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $a=1$.



B Propriétés algébriques

Propriétés

Pour tous réels positifs x et y et pour tous réels strictement positifs a et b on a :

1. $a^x \times a^y = a^{x+y}$ **2.** $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ (avec $x \geqslant y$) **3.** $(a^x)^y = a^{x\times y}$ **4.** $a^x \times b^x = (a\times b)^x$ **5.** $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Propriété

Cas particulier de la puissance $\frac{1}{n}$

Soit a et x deux nombres réels strictement positifs et n un nombre entier non nul. L'équation $x^n=a$ admet comme unique solution positive le réel $x=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ appelé **racine n-ième** de a.

Propriété

Si une grandeur subit une évolution de taux t, alors elle atteint la même valeur en subissant n évolutions successives de même taux $(1+t)^{\frac{1}{n}}-1$ où n est un entier naturel non nul.

Définition

Le nombre $(1+t)^{\frac{1}{n}}-1$ est appelé **taux moyen** des n évolutions successives de taux global t.

Exemple

D'après l'association 60 Millions de consommateurs, le prix des pâtes a augmenté d'environ 11,4 % entre février 2021 et février 2022. $t_{moyen}=\left(1+\dfrac{11{,}4}{100}\right)^{\frac{1}{12}}-1 \approx 0{,}00904 \approx 0{,}904$ %. En moyenne, entre février 2021 et février 2022, le prix des pâtes a augmenté de 0,904 % par mois.

Méthode 1 Calculer les premiers termes d'une suite géométrique

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite géométrique u définie par son premier terme $u(0)=7$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n, $u(n+1)=0{,}5\times u(n)$.

2. Calculer les trois premiers termes de la suite géométrique v définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par sa forme explicite $v(n)=3\times 2^n$.

Solution

1. u est une suite géométrique de raison 0,5 dont les premiers termes sont :

$u(0)=7$,

$u(1)=0{,}5\times u(0)=3{,}5$ et

$u(2)=0{,}5\times u(1)=0{,}5\times 3{,}5=1{,}75$.

2. $v(0)=3\times 2^0=3$,

$v(1)=3\times 2^1=6$ et

$v(2)=3\times 2^2=12$.

Méthode

1. Si la suite est définie par récurrence :

- on applique la relation de récurrence à $u(0)$ pour déterminer $u(1)$;
- on applique la relation de récurrence à $u(1)$ pour déterminer $u(2)$, et ainsi de suite.

2. Si la suite est définie explicitement, on remplace directement n par le rang du terme que l'on souhaite calculer.

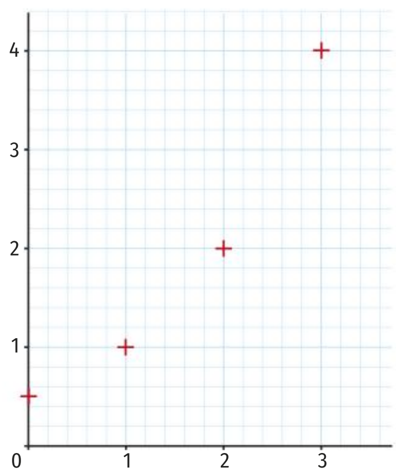
Méthode 2 Représenter le nuage de points associé à une suite géométrique

Après avoir déterminé les quatre premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u(0)=0{,}5$ et de raison 2, représenter graphiquement le nuage de points $(n\,;u(n))$ pour $0\leqslant n\leqslant 3$.

Solution

Comme dans la méthode précédente, on calcule les premiers termes : $u(0)=0{,}5$, $u(1)=2\times 0{,}5=1$, $u(2)=2\times 1=2$ et $u(3)=2\times 2=4$.

On place alors dans un repère les points de coordonnées $(0\,;0{,}5)$, $(1\,;1)$, $(2\,;2)$ et $(3\,;4)$.



Méthode

- On détermine les premiers termes de la suite.
- On associe au terme de rang n de la suite le point du plan de coordonnées $(n\,;u(n))$.
- On place chacun des points définis à l'étape précédente dans le repère pour obtenir le nuage de points associé à la suite.
- En abscisse, on lit les valeurs de n (qui sont des nombres entiers).
- En ordonnée, on lit les valeurs de $u(n)$ (qui sont des nombres réels pas nécessairement entiers).
- Attention, il ne faut pas relier les points entre eux.

Méthode 1

À l'oral

6 Soit u la suite géométrique de premier terme $u(0) = 3$ et de raison $q = 2$. Donner les quatre premiers termes de cette suite.

7 Dans la feuille de calcul ci-dessous, on cherche à calculer les premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,7.

	A	B
1	**n**	**u(n)**
2	0	20
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Quel est le premier terme de cette suite ?
2. Quelle formule faut-il écrire dans la cellule **B3** puis étirer vers le bas pour que le tableur calcule automatiquement les termes de cette suite ?
3. Quelle valeur sera affichée dans la cellule **B6** ?

8 1. Déterminer les six premiers termes de la suite géométrique u de premier terme $u(0) = 0{,}5$ et de raison $q = 2$.

2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite géométrique v de premier terme $v(0) = 6$ et de raison $q = 2{,}5$.
3. Calculer les six premiers termes de la suite w définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w(n) = 2 \times 0{,}5^n$.
4. Calculer les quatre premiers termes de la suite z définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $z(n) = 1{,}5 \times 3^n$.

9 On considère la suite géométrique définie par $u(1) = 10$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n, $u(n+1) = 0{,}5 \times u(n)$.

1. Calculer $u(2)$, puis déterminer $u(3)$.
2. Pour calculer $u(7)$, quels sont les calculs nécessaires ?

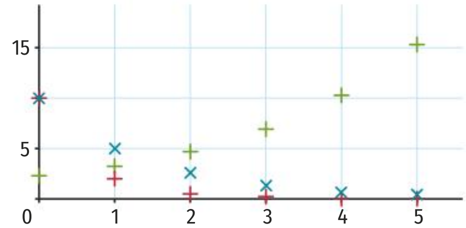
10 On considère la suite géométrique v dont la raison est $q = 3$.

1. Sachant que $v(6) = 243$, calculer la valeur de $v(7)$ et celle de $v(5)$.
2. Calculer ensuite $v(8)$ et $v(4)$.

Méthode 2

À l'oral

11 Associer à chacun des nuages de points suivants la suite géométrique u, v ou w qu'il représente.



1. $u(0) = 10$ et $u(n+1) = 0{,}5u(n)$.
2. $v(n) = 2 \times 1{,}5^n$
3. $w(n) = 10 \times 0{,}2^n$

12 Justifier pourquoi les affirmations suivantes sont vraies.

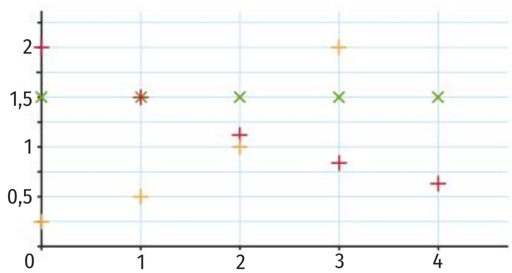
1. Si un nuage de points représente une suite géométrique de raison $q = 1$, alors les points sont alignés.
2. Pour toute suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $q > 1$, il existe un terme supérieur à 10 000.

13 1. Déterminer les six premiers termes de la suite géométrique u telle que $u(0) = 8$ et $q = 0{,}5$.

2. Représenter graphiquement le nuage de points $(n\ ;\ u(n))$ pour $0 \leqslant n \leqslant 5$.

14 Dans un repère orthonormé, représenter les trois premiers points de la représentation graphique de la suite géométrique u de premier terme $u(0) = 3$ et de raison $q = 0{,}8$.

15 Pour chacun des trois nuages de points suivants, donner l'expression de la suite géométrique qu'il représente.



Méthode 3 Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique ou d'une fonction exponentielle

1. Donner le sens de variation de la suite u définie par $u(0)=3$ et la relation de récurrence $u(n+1)=2\times u(n)$ valable pour tout entier naturel n.

2. Donner le sens de variation des fonctions exponentielles suivantes.

a. f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=1{,}17^x$.

b. g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=0{,}997^x$.

Solution

1. La suite u est géométrique et $u(0)=3>0$, on peut donc utiliser le critère du cours.
De plus, $q=2>1$ donc la suite u est strictement croissante.

2. a. $f(x)$ est de la forme a^x avec $a=1{,}17$. Or, $1{,}17>1$ donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. $g(x)$ est de la forme a^x avec $a=0{,}997$. Or, $0{,}997<1$ donc g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Méthode

1. On vérifie que $u(0)>0$, puis on regarde la raison de la suite :

- si $q>1$, la suite géométrique est croissante ;
- si $q=1$, la suite géométrique est constante ;
- si $0<q<1$, la suite géométrique est décroissante.

2. On regarde la valeur de a :

- si $a>1$, la fonction exponentielle est croissante sur $[0\,;+\infty[$;
- si $a=1$, la fonction exponentielle est constante sur $[0\,;+\infty[$;
- si $0<a<1$, la fonction exponentielle est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Méthode 4 Calculer un taux d'évolution moyen

D'après le ministère de la Transition énergétique, le prix moyen TTC du gazole a bondi de 1,5367 € en décembre 2021 à 2,029 € en mars 2022, ce qui représente une augmentation d'environ 32 %.

À quel taux mensuel moyen cette évolution correspond-elle ?

Solution

On travaille sur les données de décembre 2021 à mars 2022, soit une durée de trois mois.

On compte donc trois évolutions mensuelles.

On doit donc avoir $(1+t_{\text{moyen}})^3=1+\frac{32}{100}=1{,}32$.

Ainsi, $1+t_{\text{moyen}}=1{,}32^{\frac{1}{3}}$.

Par conséquent, $t_{\text{moyen}}=1{,}32^{\frac{1}{3}}-1$.

Avec la calculatrice, on trouve $t_{\text{moyen}}\approx 9{,}696$ %.

En moyenne, le prix TTC du gazole a augmenté d'environ 9,696 % chaque mois entre décembre 2021 et mars 2022.

On peut aussi utiliser directement la formule : $t_{\text{moyen}}=\left(1+\frac{32}{100}\right)^{\frac{1}{3}}-1$.

Méthode

- On commence par compter le nombre n de périodes sur lesquelles le taux moyen doit être calculé.
- On utilise l'égalité des coefficients multiplicateurs liés aux évolutions successives.
- On détermine ensuite t_{moyen} en utilisant la puissance $\frac{1}{n}$.

Méthode 3

À l'oral

16 Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation des suites géométriques de premier terme strictement positif dont la raison q est donnée.

1. $q = 2$ **2.** $q = 0{,}1$

17 Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. La fonction f définie par $f(x) = 1{,}5^x$ est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

2. La suite géométrique de premier terme 0,1 et de raison 2 est décroissante.

18 Quel est le sens de variation des suites géométriques suivantes définies pour tout entier naturel n ? Justifier.

1. u définie par $u(n+1) = 2 \times u(n)$ et $u(0) = 3$.

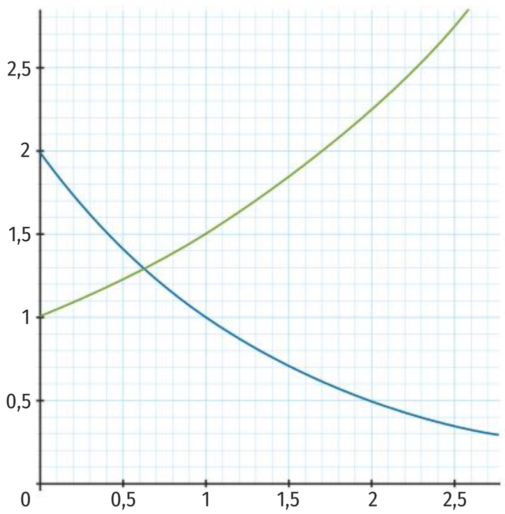
2. v définie par $v(n+1) = 0{,}3 \times v(n)$ et $v(0) = 7$.

19 On considère les fonctions f, g, h et k définies sur $[0\ ;+\infty[$. Déterminer le sens de variation de chacune d'entre elles.

1. $f(x) = 0{,}3^x$ **2.** $g(x) = 2^x$

3. $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **4.** $k(x) = \left(\frac{16}{5}\right)^x$

20 On considère les fonctions f et g définies sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 1{,}5^x$ et $g(x) = 2 \times 0{,}5^x$.
En justifiant, associer chacune de ces fonctions à sa représentation graphique.



Méthode 4

À l'oral

21 Un prix subit, en un an, une augmentation de 12 %. Anatole affirme qu'en moyenne, le prix a augmenté de 1 % chaque mois. A-t-il raison ? Justifier.

22 Les ventes d'un album ont augmenté de 40 % lors d'une semaine par rapport à la précédente, puis de 10 % la semaine suivante. Antoine affirme qu'en moyenne, sur ces deux semaines, les ventes de l'album ont augmenté de 25 % par semaine. A-t-il raison ? Justifier.

23 Un saule pleureur mesure 2 mètres.
On s'attend à ce que, en un an, sa hauteur augmente de 50 %. Quel sera le taux moyen de croissance par mois durant cette année-là ?

24 D'après l'Insee, le nombre de naissances en France métropolitaine est passé de 802 224 en 2010 à 696 800 en 2020, ce qui correspond à une baisse d'environ 13 % en dix ans.
Calculer l'évolution annuelle moyenne arrondie à 0,01 % du nombre de naissances en France métropolitaine entre 2010 et 2020.

25 D'après l'Insee, le nombre de mariages en France est passé de 252 000 en 2010 à 155 000 en 2020, ce qui correspond à une baisse d'environ 38,5 %. Déterminer l'évolution annuelle moyenne arrondie à 0,1 % du nombre de mariages en France entre 2010 et 2020.

26 Pendant une semaine, Joceline a noté chaque jour le nombre de pas qu'elle a effectués dans la feuille de calcul suivante.

	A	B
1	Lundi	6 875
2	Mardi	11 532
3	Mercredi	10 876
4	Jeudi	8 435
5	Vendredi	9 634
6	Samedi	13 574
7	Dimanche	11 081

1. Quelle a été l'évolution globale arrondie à 0,01 % du nombre de pas entre lundi et dimanche ?

2. Calculer, à 0,1 % près, le taux d'évolution moyen du nombre de pas par jour entre lundi et dimanche.

1 Suites géométriques

27

On considère la suite u définie par $u(0) = 0{,}5$ et, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = 3 \times u(n)$.

1. Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.

2. Exprimer, pour tout entier naturel n, $u(n)$ en fonction de n.

3. En déduire $u(7)$.

28 Exercice inversé

Écrire l'énoncé d'un exercice sur les suites géométriques dont les réponses sont les suivantes.

1. $u(1) = 10$, $u(2) = 50$ et $u(3) = 250$.

2. $v(1) = 3$, $v(2) = 4{,}5$ et $v(3) = 6{,}75$.

29

On considère la suite u définie par $u(0) = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = 4 \times u(n)$.

1. Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.

2. Exprimer $u(7)$ en fonction de $u(6)$, puis $u(6)$ en fonction de $u(5)$.

3. En déduire $u(7)$ en fonction de $u(5)$.

30 Environnement

La quantité d'énergie, en TWh, consommée chaque année par les data centers dans le monde depuis 2018 peut être modélisée par la suite géométrique définie par $u(0) = 200$ et $u(n+1) = 1{,}6 \times u(n)$, où n représente le nombre d'années écoulées depuis l'année 2018.

1. Quelle est la raison de cette suite géométrique ?

2. Selon cette modélisation, quelle quantité d'énergie a été consommée par les data centers en 2021 ?

3. On estime qu'à Paris, en 2021, un habitant consomme en moyenne 1,82 MWh/an soit $1{,}82 \times 10^{-6}$ TWh/an. D'après la région Île-de-France, Paris comptait 2 175 061 habitants en 2021.
Au cours de cette année, la population parisienne a-t-elle consommé plus ou moins d'énergie que les data centers ?

31

Lorsqu'une personne prend connaissance d'une rumeur, elle partage cette rumeur avec deux autres personnes qui ne la connaissaient pas.

1. Montrer que la propagation d'une rumeur peut être modélisée par une suite géométrique dont on précisera la raison.

2. Dans la situation de l'énoncé, la rumeur va-t-elle gagner ou perdre en intensité ? Justifier.

3. En étudiant de plus près le comportement des personnes, on remarque que 80 % des personnes qui prennent connaissance de la rumeur ne la partagent pas. On suppose que 10 000 personnes sont au courant de la rumeur. Justifier que la modélisation de la propagation de la rumeur est toujours une suite géométrique et en donner la nouvelle raison.

4. La rumeur va-t-elle gagner ou perdre en intensité ? Justifier.

32

Jean a calculé les sept premiers termes d'une suite géométrique. Malheureusement il a effacé par erreur certains d'entre eux.

$u(0) = 8$

$u(2) = 2$ $\qquad u(5) = 0{,}25$

Aider Jean à retrouver les termes manquants.

33 En NSI

Un microprocesseur est la partie d'un ordinateur qui permet d'exécuter les instructions et de traiter les données d'un programme.

Un transistor est un des composants du microprocesseur : plus le microprocesseur contient de transistors, plus il peut réaliser des opérations complexes et traiter des nombres de grande taille.

En 1965, Gordon Moore conjecture que le nombre de transistors sur un microprocesseur nouvelle génération doublera tous les deux ans.
En 1972, le processeur « 8008 » possédait 3 500 transistors.

1. Justifier que, selon la loi de Moore, le nombre de transistors sur un microprocesseur à l'année $1972 + 2n$ est modélisé par une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

2. En 1974 est sorti le processeur « 8080 ».
Selon la modélisation précédente, combien de transistors contenait-il ?

34

La loi de Moore, définie dans l'exercice précédent, conjecture que le nombre de transistors dans un microprocesseur est modélisé par la suite géométrique p de premier terme $p(0)=3\,500$ et de raison 2.

On donne la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C
1	**Année**	**Rang n**	**Nombre de transistors**
2	1972	0	3500
3	1974		
4	1976		
5	1978		
6	1980		
7	1982		
8	1984		
9	1986		
10	1988		
11	1990		
12	1992		
13	1994		
14	1996		
15	1998		
16	2000		
17	2002		
18	2004		
19	2006		
20	2008		
21	2010		

1. Quelle formule doit-on saisir en **C3**, puis étirer vers le bas, pour obtenir le nombre de transistors dans les microprocesseurs à l'année voulue ?

2. Compléter cette feuille de calcul, soit en utilisant un tableur, soit en utilisant la calculatrice, pour calculer une estimation du nombre de transistors sur un microprocesseur en 2010.

3. On rappelle que, p étant une suite géométrique, on a, pour tout entier naturel n, $p(n)=p(0)\times q^n$.

À l'aide de cette formule, calculer le nombre de transistors dans un microprocesseur en 2010.

4. Une recherche Internet montre qu'en 2010, on comptait environ 1 170 000 000 transistors par microprocesseur.

Que peut-on dire de la loi de Moore ? Donne-t-elle des résultats exacts ? De bons ordres de grandeur ?

35

On considère la suite géométrique u définie pour tout entier naturel n, de premier terme $u(0)=8$ et de raison $q=1{,}5$.

1. Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.

2. Représenter graphiquement le nuage de points associé aux quatre premiers termes de cette suite.

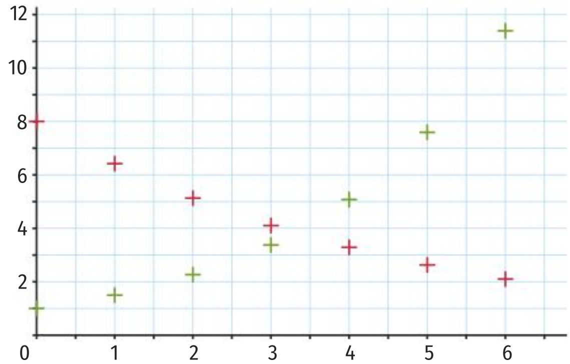
36

On considère les suites géométriques k et p définies par $k(0)=1$ et $p(0)=8$ et les relations, valables pour tout entier naturel n, $k(n+1)=1{,}5\times k(n)$ et $p(n+1)=0{,}8\times p(n)$.

Associer à chaque suite la représentation graphique qui lui correspond en utilisant la méthode indiquée.

1. En utilisant une des valeurs prises par chacune des suites.

2. En utilisant les variations des suites étudiées.



37

Parmi les suites géométriques suivantes, définies pour tout $n\in\mathbb{N}$, lesquelles sont croissantes ? Justifier.

1. $u(0)=4$ et $u(n+1)=0{,}5\times u(n)$.

2. $v(0)=0{,}5$ et $v(n+1)=4\times v(n)$.

3. $w(0)=4$ et $w(n+1)=\sqrt{2}\times w(n)$.

4. $z(0)=4$ et $z(n+1)=\frac{1}{4}\times z(n)$.

38 *Fil rouge*

La quantité de carbone 14 d'un organisme biologique vivant est stable et vaut A. À sa mort, on estime que cette quantité diminue approximativement de 1,24 % par siècle.

On note $C(n)$ la quantité de carbone 14 dans un organisme n siècles après sa mort. Ainsi, $C(0)=A$.

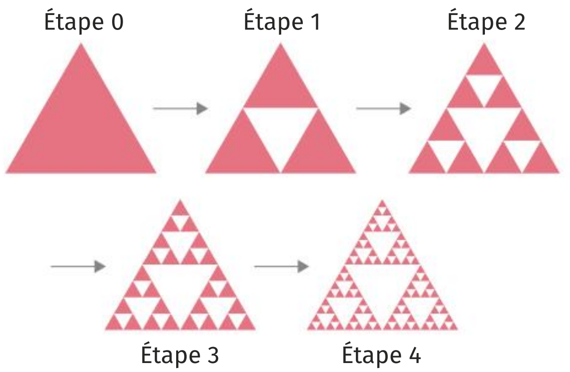
1. Justifier que la suite C est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2. Déterminer les variations de cette suite. Cela semble-t-il cohérent avec le contexte ?

3. Un organisme est mort depuis deux siècles. Exprimer la quantité de carbone 14 présent dans cet organisme en fonction de A.

39

Un triangle de Sierpinski se dessine en commençant par tracer un triangle équilatéral dont l'aire vaut 1.
À la première étape, on marque le milieu de chacun de ses côtés et on enlève le triangle au centre. Puis on répète l'opération avec les trois triangles restants et ainsi de suite.



1. Quelle est l'aire de la partie colorée à l'étape initiale ? À l'étape 1 ? À l'étape 2 ?

2. Par quelle opération passe-t-on de l'aire colorée de l'étape n à l'aire colorée de l'étape $n+1$?

3. On note A la suite qui modélise l'aire colorée à chaque étape.

Justifier que A est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

4. Exprimer, pour tout entier naturel n, $\mathrm{A}(n)$ en fonction de n.

5. En utilisant la calculatrice ou le tableur, déterminer la plus petite valeur de n telle que $\mathrm{A}(n) < 0{,}1$.

2 Fonctions exponentielles

40

Parmi les fonctions suivantes, définies pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, lesquelles sont croissantes et lesquelles sont décroissantes ? Justifier.

$f(x) = 3^x$ $\qquad$ $h(x) = 0{,}7^x$

$g(x) = 0{,}8^x$ $\qquad$ $m(x) = 1{,}3^x$

41

1. Dans chacun des cas, classer A, B, C et D dans l'ordre croissant sans utiliser la calculatrice.

a. $\mathrm{A} = 2^{3,1}$, $\mathrm{B} = 2^{2,5}$, $\mathrm{C} = 2^{7,3}$ et $\mathrm{D} = 2^{\pi}$.

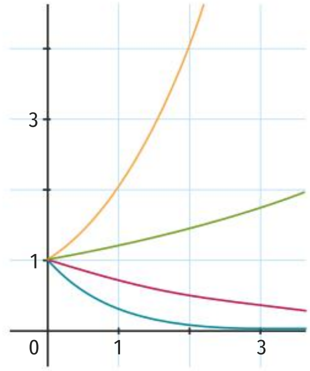
b. $\mathrm{A} = 0{,}5^{3,1}$, $\mathrm{B} = 0{,}5^{2,5}$, $\mathrm{C} = 0{,}5^{7,3}$ et $\mathrm{D} = 0{,}5^{\pi}$.

2. Utiliser maintenant la calculatrice pour vérifier l'ordre obtenu.

42

On a représenté sur le graphique ci-dessous les fonctions f, g, h et k définies, pour tout réel x positif, par $f(x) = 1{,}2^x$, $g(x) = 0{,}7^x$, $h(x) = 0{,}3^x$ et $k(x) = 2^x$.

Associer en justifiant chacune de ces fonctions à sa représentation graphique.



43 *Fil rouge*

Pour modéliser l'âge d'un organisme biologique, on peut mesurer son taux de carbone 14. Tant que l'organisme est en vie, le taux est de 100 %. Puis, ce taux commence à décroître à la mort de l'organisme en suivant le rythme donné par la courbe ci-dessous.

1. On prélève un échantillon d'un organisme biologique mort. Le taux de carbone 14 est de 70 %. Depuis combien de temps cet organisme est-il mort ?

2. Un organisme biologique est mort depuis 10 000 ans. Quel est le taux de carbone 14 mesuré ?

3. La courbe représente la fonction f définie pour tout $x \geqslant 0$ par $f(x) = 100 \times 0{,}887^x$.

a. Justifier que la fonction f est décroissante.

b. À l'aide d'un outil numérique, combien de millier d'années faut-il attendre pour que le taux soit inférieur à 5 %.

44

Sans calculatrice, montrer que les opérations suivantes ont toutes pour résultat 8.

1. $\dfrac{8^{3,2}}{8^{0,4} \times 8^{1,8}}$

2. $\dfrac{2^{4,1} \times 5^{1,1}}{10^{1,1}}$

45

Simplifier les calculs suivants.

1. $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{3,2} \times 5^{3,2}$

2. $3,5^{1,2} \times 3,5^{4,1}$

3. $0,8^{6,2} \div 0,8^{5,1}$

46 Copie d'élève

Le professeur a demandé à Camille d'effectuer le calcul suivant : $\dfrac{1,5^{1,3} \times 8^{1,3}}{2^{0,6} \times 2^{0,7}}$.

Voici la copie de Camille, qui ne contient aucune erreur.

$$\frac{1,5^{1,3} \times 8^{1,3}}{2^{0,6} \times 2^{0,7}} = \frac{12^{1,3}}{2^{0,6} \times 2^{0,7}}$$
$$= \frac{12^{1,3}}{2^{1,3}}$$
$$= 6^{1,3}$$

Proposer une justification pour chaque étape du raisonnement de Camille.

47

Un prix augmente de 15 % puis diminue de 1 %.

1. De quel pourcentage global ce prix a-t-il évolué ?

2. Déterminer le taux d'évolution moyen.

3. Obtient-on le même taux d'évolution moyen si le prix diminue de 1 % puis augmente de 15 % ? Justifier.

48

En France, le SMIC est le salaire minimum mensuel pour un contrat de 35 h par semaine.

Les données ci-dessous sont les valeurs du SMIC mensuel brut en euro.

Date	Valeur du SMIC	Augmentation en %
1er janvier 2015	1457,52	
1er janvier 2016	1466,62	0,62
1er janvier 2017	1480,27	0,93
1er janvier 2018	1498,47	1,23
1er janvier 2019	1521,22	1,52
1er janvier 2020	1539,42	1,20
1er janvier 2021	1554,58	0,98

1. Quel est le coefficient multiplicateur associé à l'évolution du SMIC du 1er janvier 2015 au 1er janvier 2021 ?

2. Déterminer le taux d'augmentation annuel moyen du SMIC, arrondi à 0,001 %, sur la période courant du 1er janvier 2015 au 1er janvier 2021.

Défis !

49 1. Justifier que $216^{\frac{1}{3}}$ et $625^{\frac{1}{4}}$ sont des entiers naturels.

2. Pour quelles valeurs entières de $n > 0$ le nombre $256^{\frac{1}{n}}$ est-il un entier naturel ?

50 Trouver un nombre b tel que, pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, $b^{\frac{1}{n}}$ est un nombre entier.

51 On considère deux suites géométriques décroissantes u et v, définies pour tout entier naturel n, et de raisons respectives q_1 et q_2.

On note w la suite définie, pour tout entier naturel n, par $w(n) = u(n) \times v(n)$.

1. Montrer que w est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de q_1 et q_2.

2. Montrer que w est décroissante.

Remarque Cette double-page permet d'approfondir les notions de ce chapitre et de travailler de façon différenciée avec les élèves de la classe, notamment avec les plus à l'aise en mathématiques ou bien avec celles et ceux qui souhaiteraient choisir l'option mathématiques complémentaires en terminale.

Cours

Compléments sur les suites et fonction exponentielle

Propriété

Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 0$ dont aucun terme n'est nul. Pour tous entiers naturels p et n, on a $u(n) = u(p) \times q^{n-p}$ ou, en notation indicielle, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Démonstration Voir exercice 56 p. 101.

Définitions

Il existe un nombre irrationnel remarquable noté e dont une valeur approchée à 10^{-9} près est 2,718 281 828.

La fonction exponentielle de base e est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
On note aussi $f(x) = \exp(x)$.

52 Un banquier propose à son client Monsieur Leonhard le choix entre deux placements :

- P_1 : +100 % sur un an permettant donc de doubler son capital en un an ;
- P_2 : +50 % sur les six premiers mois, puis +50 % sur les six derniers.

1. Quel placement est le plus avantageux pour M. Leonhard ?

2. M. Leonhard suggère alors quatre évolutions de +25 %. Par combien son capital sera-t-il alors multiplié ?

3. Plus généralement, par quel nombre sera multiplié le capital de M. Leonhard après n hausses de taux $\frac{1}{n}$?

4. Avec une calculatrice ou un tableur, calculer ces différents coefficients multiplicateurs pour des valeurs de n de plus en plus grandes.

5. On peut montrer que ces nombres croissent pour devenir aussi proches que l'on veut d'un nombre irrationnel noté e proche de 2,7. Donner la valeur approchée de e obtenue pour $n = 1\,000$ et $n = 100\,000$ et comparer ce résultat à l'affichage de votre calculatrice pour e^1 (touche e^x ou exp).

53 Au début d'une infection, la concentration de bactéries dans un organisme s'élevait à 1 000 bactéries par mm³ de sang.

Pour tout entier naturel n, on note b_n le nombre de bactéries n jours après le début de l'infection.

On admet que le traitement antibiotique administré au malade permet de diviser chaque jour le nombre de bactéries par 3.

1. Justifier que b est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2. Quel est le sens de variation de b ? Justifier.

3. Au bout de combien de temps la concentration de bactéries deviendra-t-elle inférieure à dix bactéries par mm³ ?

4. Recopier et compléter le programme Python suivant permettant de retrouver le résultat de la question **3.**

```
def seuil() :
    b = 1000
    n = 0
    while ... :
        b = ...
        n = ...
    return ...
```

54 Le bénéfice d’une entreprise de plomberie s’élevait à 10 000 € en 2015. Durant les années suivantes, le bénéfice a augmenté de 3 % chaque année.

1. Justifier que le bénéfice peut être modélisé par une suite géométrique b dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. Exprimer, pour tout entier naturel n, b_n en fonction de la raison de la suite et de son premier terme.

3. Calculer le bénéfice en 2016 et en 2022.

4. Quel est le bénéfice total cumulé qu’a réalisé l’entreprise entre 2015 et 2022 ?

55 On observe la croissance d’un nénuphar dans un étang de 200 m². Au début de l’observation, son aire vaut 0,5 m² et sa surface augmente de 10 % par jour.

1. Justifier que l’on peut modéliser la taille du nénuphar par une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2. Calculer l’aire du nénuphar au bout de 10 jours.

3. À l’aide d’un outil numérique, déterminer au bout de combien de temps l’étang sera entièrement recouvert par le nénuphar selon cette modélisation.

56 On souhaite démontrer que, si u est une suite géométrique de raison q dont aucun terme n’est nul et de premier terme $u(0)$, alors, pour tous entiers naturels n et p, $u(n)=u(p)\times q^{n-p}$.

1. Donner l’expression de $u(n)$ en fonction de $u(0)$, de q et de n.

2. Donner l’expression de $u(p)$ en fonction de $u(0)$, de q et de p.

3. a. En déduire alors l’expression de $\dfrac{u(n)}{u(p)}$.

b. Conclure.

57 On considère la suite u définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $u_0=4$ et $u_{n+1}=0{,}5u_n+1$.

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. La suite u est-elle géométrique ?

2. Représenter dans un repère le nuage de points $(n\,;u_n)$ pour $0\leqslant n\leqslant 3$.

3. a. Montrer que la suite v définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $v_n=u_n-2$ est une suite géométrique de raison 0,5.

b. Exprimer alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

58 Dans un élevage, une population de lapins augmente de 30 % par mois. Par ailleurs, chaque mois, l’éleveur prélève 120 lapins destinés à la vente.

La population initiale de lapins est de 400 lapins.

1. Justifier que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=1{,}3u_n-120.$$

2. Déterminer les six premiers termes de cette suite.

3. Quel semble être son sens de variation ?

59 Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $\mathrm{A}=\mathrm{e}^4(\mathrm{e}^3+\mathrm{e}^7)$

2. $\mathrm{B}=(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^6)(\mathrm{e}^3+\mathrm{e})$

3. $\mathrm{C}=(\mathrm{e}^8-\mathrm{e}^2)(\mathrm{e}^6+1)$

4. $\mathrm{D}=(\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^3)(\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^8)$

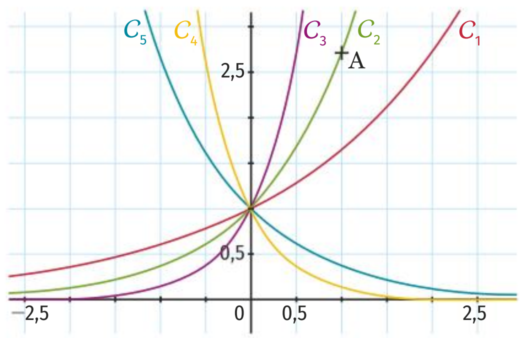
60 Démontrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x.

1. $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x}=1-\mathrm{e}^{-x}$

2. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$

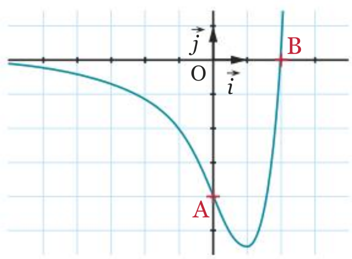
3. $(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{2x})^2=\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{2x}+1)$

61 Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes ci-dessous représentant les fonctions f, g, h, p et q définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$, $g(x)=\mathrm{e}^x$, $h(x)=\mathrm{e}^{2x}$, $p(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et $q(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.



Sachant que A a pour coordonnées $(1\,;\mathrm{e})$, associer chaque fonction à sa courbe représentative.

62 On donne ci-dessous la courbe représentative d’une fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^x$ où a et b sont des réels.



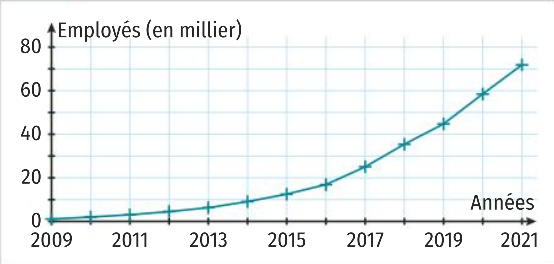
1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(2)$.

2. En déduire les valeurs des réels a et b.

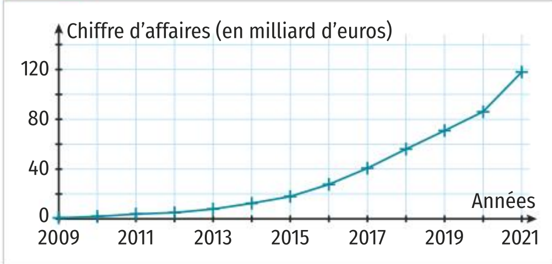
Meta est-il en déclin ?

Meta est une entreprise américaine créée en 2004 et propriétaire notamment du réseau social Facebook. Norhane et Lana ont lu un article dans leur journal préféré dont le titre est « Meta, le déclin a-t-il commencé ? ». Norhane a trouvé les statistiques suivantes sur Meta.

Doc. 1 **Nombre d'employés de Meta depuis 2009**



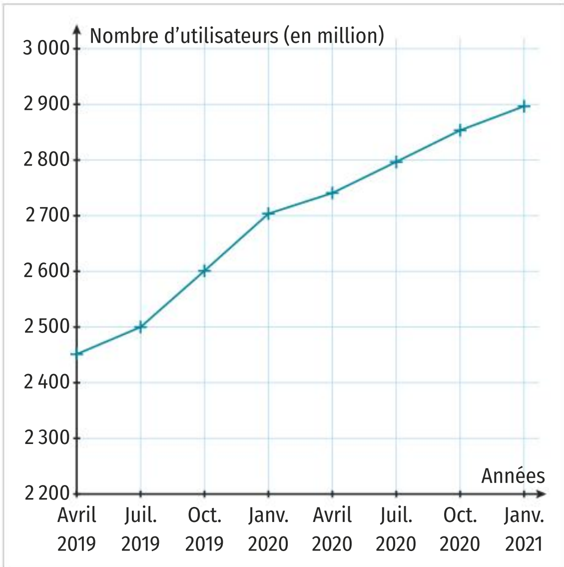
Doc. 2 **Chiffre d'affaires de Meta depuis 2009**



Doc. 3 **Quelques données sur Meta**

Année	Nombre d'employés	Chiffre d'affaires (en million d'euros)
2009	1 281	777
2010	2 127	1 974
2011	3 200	3 711
2012	4 619	5 120
2013	6 339	7 872
2014	9 199	12 466
2015	12 691	17 928
2016	17 048	27 638
2017	25 105	40 654
2018	35 587	56 000
2019	44 942	70 697
2020	58 604	85 965
2021	71 970	117 929

Doc. 4 **Nombre mensuel d'utilisateurs actifs de Facebook depuis avril 2019**



Questions

1. Montrer que le chiffre d'affaires de Meta peut être modélisé par une suite géométrique de raison 1,48 (avec une marge d'erreur de 0,11) entre 2012 et 2018.
2. En utilisant la modélisation de la question précédente, calculer le chiffre d'affaires prévu en 2020 et 2021, et le comparer avec la réalité.
3. Par un raisonnement similaire, mais en utilisant les données sur le nombre d'employés, peut-on confirmer ou infirmer le titre de l'article ? Justifier.
4. Conjecturer graphiquement si le nombre quotidien d'utilisateurs de Facebook est linéaire ou exponentiel.

Fil rouge du chapitre

1 La datation au carbone 14

Sujet : La datation au carbone 14 est une technique scientifique développée dans les années 1940 qui permet de dater des éléments organiques anciens. Ce fut une véritable révolution en archéologie et en paléontologie.

Comment mesurer l'âge d'un résidu organique ?

Pistes de recherche :

- Rechercher ce qu'est le carbone 14. En quoi diffère-t-il du carbone 12 ?
- Expliquer ce qu'est la demi-vie du carbone 14.
- Proposer deux modélisations, l'une discrète et l'autre continue, de l'évolution du taux de carbone 14 lors de la mort de l'organisme.
- Proposer un exemple d'utilisation de cette modélisation pour déterminer l'âge d'un composant organique.

EXPOSÉ INVERSÉ

Cet exposé peut être réalisé en « Exposé inversé ». Les orateurs commencent par une brève présentation du sujet et ce sont ensuite les élèves de la classe qui doivent poser des questions, préparées en avance, pour faire avancer l'exposé.

2 Le modèle de Malthus

Sujet : À la fin du XVIII^e siècle, l'économiste anglais Thomas Robert Malthus a proposé une modélisation de l'évolution de la population anglaise et de l'accroissement des ressources. Ce modèle, qui porte aujourd'hui son nom, a alors créé une grande controverse.

Comment Malthus avait-il modélisé l'évolution de la population et des ressources ? Quelle conclusion en tirait-il ?

Pistes de recherche :

- Chercher qui est Thomas Malthus.
- Utiliser une feuille de calcul pour effectuer une simulation de la population anglaise selon le modèle de Malthus.
- Expliquer en quoi ce modèle est en contradiction avec l'augmentation linéaire de la production agricole.
- Comparer le résultat de la simulation avec la réalité.
- Expliquer les limites du modèle de Malthus.
- Existe-t-il d'autres modèles d'évolution de la population ?

DES CONSEILS POUR L'ORAL

- Ne pas trop lire ses notes.
- Parler fort et bien articuler.
- Surveiller sa montre pour ne pas dépasser le temps imparti.

Partie

4 Dérivation

Histoire des mathématiques

Naissance du calcul différentiel

Au début du XVII^e siècle, des scientifiques tels que Galilée ou Kepler sont amenés à étudier des courbes dans diverses situations : orbites des planètes, trajectoire d'un projectile, etc. Afin de résoudre un certain nombre de problèmes comme par exemple prédire des trajectoires, il est plus simple pour ces savants d'étudier des portions de courbes infiniment petites. Les quantités étudiées dans ce cas sont qualifiées d'infinitésimales.

C'est d'abord Cavalieri (1598-1647), notamment, qui cherche à théoriser cette notion d'infiniment petit. Il s'appuie sur les travaux d'Archimède et développe ensuite son propre concept d'indivisibles permettant de calculer des aires et des volumes. Ses idées séduisent et se généralisent, mais la conception de ces infiniment petits reste encore difficile à maîtriser.

À la fin du XVII^e siècle, indépendamment l'un de l'autre, les travaux de **Newton** (1642-1727) et **Leibniz** (1646-1716) vont jeter les bases du calcul infinitésimal qui sera exploitable et dans de très nombreux domaines.

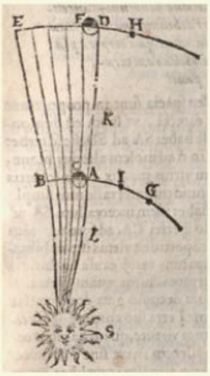


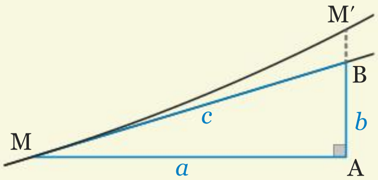
Image du système solaire présenté par Kepler.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

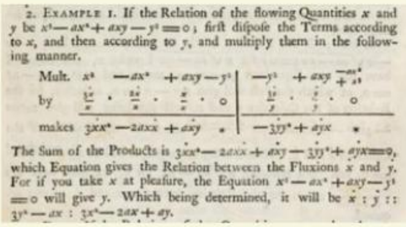
Isaac Newton (1642-1727)

Les principes de Newton et de Leibniz

Les travaux de Newton et de Leibniz sont sensiblement similaires.
Il s'agit de déterminer une valeur approchée de la longueur de l'arc de courbe entre M et M' en utilisant le triangle MAB ci-contre rectangle en A, où (MB) est la tangente à la courbe en M.



Newton, célèbre pour sa théorie de la gravitation universelle, publie tardivement ses travaux sur le sujet en 1671 dans *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum*. L'influence de la physique y est omniprésente. Il considère un objet se déplaçant du point M au point M' en un temps infinitésimal qu'il note o. Les vitesses horizontale et verticale de cet objet théorique sont respectivement notées $\dot{x}$ et $\dot{y}$. Il peut alors écrire, dans le triangle ci-dessus, $a = \dot{x}o$ et $b = \dot{y}o$. Il effectue ses calculs en considérant que certaines valeurs peuvent être négligées puisque le temps o considéré est infinitésimal. Cette démarche lui permet d'aboutir à une approximation valide de la longueur d'arc recherchée.



2. Example 1. If the Relation of the flowing Quantities x and y be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; firſt diſpoſe the Terms according to x, and then according to y, and multiply them in the following manner.

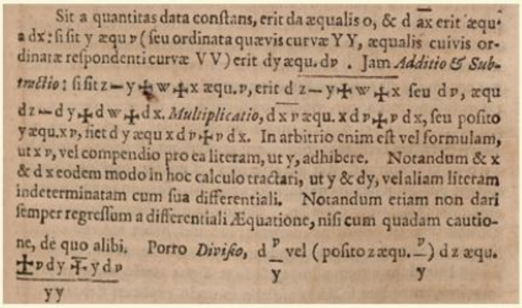
Mult.	$x^3 \quad -ax^2 \quad +axy - y^3$	$-y^3 \quad +axy \quad {-ax^2 \atop +x^3}$
by	$\frac{3\dot{x}}{x} \cdot \frac{2\dot{x}}{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x} \cdot 0$	$\frac{3\dot{y}}{y} \cdot \frac{\dot{y}}{y} \cdot 0$
makes	$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y \quad \cdot$	$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x \quad \cdot$

The Sum of the Products is $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, which Equation gives the Relation between the Fluxions $\dot{x}$ and $\dot{y}$. For if you take x at pleaſure, the Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ will give y. Which being determined, it will be $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.

Extrait de *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* de Newton.

Leibniz ne connaît pas les travaux de Newton mais trouve que les méthodes de ses contemporains sont trop compliquées et cherche à les simplifier. En 1684, il écrit un mémoire où il introduit ses idées : *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus…, & Singulare pro illis Calculi Genus*.

Il note $a = \mathrm{d}x$, $b = \mathrm{d}y$ et $c = \mathrm{d}s$ les longueurs du triangle MAB précédent qu'il appelle triangle caractéristique infinitésimal. Il utilise le théorème de Pythagore et simplifie ses calculs en expliquant lui aussi que certaines valeurs peuvent être considérées comme négligeables.



Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis o, & d $\overline{ax}$ erit æqu. a dx : ſi ſit y æqu v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv . Jam *Additio & Subtractio* : ſi ſit z − y + w + x æqu. v, erit d $\overline{z - y + w + x}$ ſeu dv, æqu dz − dy + dw + dx. *Multiplicatio*, d $\overline{xv}$ æqu. x dv + v dx, ſeu poſito y æqu. xv, fiet dy æqu x dv + v dx. In arbitrio enim eſt vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum ſua differentiali. Notandum etiam non dari ſemper regreſſum a differentiali Æquatione, niſi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Diviſio*, d $\frac{v}{y}$ vel (poſito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

Nova Methodus pro Maximis et Minimis de Leibniz.

Les frères Jacques (1654-1705) et Jean Bernoulli (1667-1748) sont immédiatement séduits par les calculs de Leibniz. Ils les reprennent et les utilisent abondamment pour obtenir bon nombre de nouveaux résultats mathématiques. Cette utilisation des méthodes de Leibniz assure une rapide diffusion du calcul infinitésimal. Plus tard, la dérivée d'une fonction f par rapport à sa variable x sera notée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Naissance de la fonction exponentielle

On sait depuis longtemps calculer des puissances entières comme $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Mais quelle signification pourrait-on donner à des puissances irrationnelles comme par exemple $3^{\sqrt{2}}$? La réponse rigoureuse à ce besoin n'a pu se faire qu'avec le développement du calcul différentiel, la formalisation de la notion de fonction et la construction de la fonction logarithme. Nous voici donc entre la fin du XVIIe siècle et le début du XVIIIe.

Christian Huygens (1629-1695)

Dans une lettre de 1690 de Leibniz à **Huygens** (1629-1695), on trouve la première définition de la base naturelle des logarithmes, nombre qui sera plus tard noté e. En 1690, Jacques Bernoulli étudie le problème des taux d'intérêt composés continus et, en 1694, les échanges entre Jean Bernoulli et Leibniz permettent de mieux définir la fonction exponentielle. Dans son *Principia Calculi Exponentialium seu Percurrentium* publié en 1697, Jean Bernoulli étudie complètement la fonction exponentielle. C'est à **Leonhard Euler** (1707-1783) que l'on doit la première utilisation de la lettre e comme notation pour la base du logarithme naturel (1728) et comme notation pour l'exponentielle. En 1778, il démontre que e est un nombre irrationnel et il en donne une valeur approchée à 23 décimales. Il faudra enfin attendre 1874 et les travaux de **Charles Hermite** (1822-1901) pour prouver que le nombre e est transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être solution d'une équation algébrique.

Leonhard Euler (1707-1783)

Chapitre

5 Variations instantanées

Objectifs du chapitre :

1. Interpréter un nombre dérivé dans le cadre d'un modèle d'évolution.

2. Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.

Fil rouge du chapitre

Comment estimer la valeur de l'accélération subie par un pilote de formule 1 lorsqu'il accélère ou lorsqu'il freine avec son véhicule ?

Exercices rituels

1 Anaëlle fait ses courses et achète trois produits à 2,98 € l'unité, un produit à 1,99 € et deux produits à 2,49 € l'unité.

Déterminer mentalement un ordre de grandeur du prix qu'Anaëlle va payer à la caisse.

2 Calculer 11×13.

3 Parmi les nombres $\frac{8 \times 12 \times (-15)}{2 \times 37}$ et $\frac{2 \times 3 \times 29}{5 \times 15}$, lequel est le plus petit ?

4 Une quantité augmente de 6 % puis diminue de 3 %. Quel est le taux d'évolution global de cette quantité ?

5 En physique, la puissance électrique P, en watt (W), d'un appareil est donnée par la formule $P = UI$, où U est la tension, en volt (V), et I est l'intensité, en ampère (A).

Si $P = 660$ W et $I = 3$ A, quelle est la valeur de U en volt ?

D'autres exercices rituels p. 10 ou sur LLS.fr/EM1Rituels

A Tangente à une courbe en un point

Objectif **Comprendre ce qu'est la tangente à une courbe en un point en utilisant des fonctionnalités de GeoGebra.**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$.

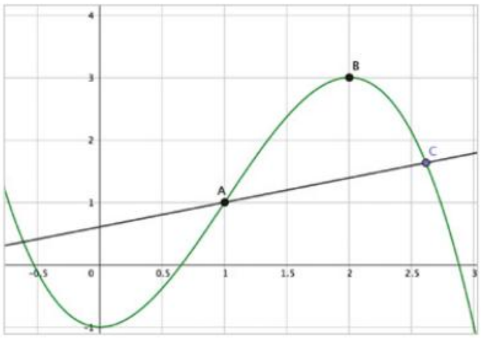
Questions

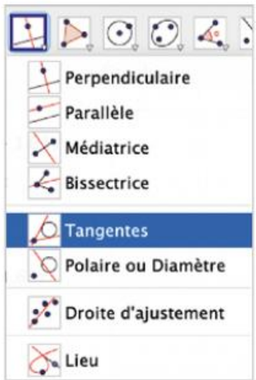
1 **a.** À l'aide de GeoGebra, construire la courbe représentative C_f de la fonction f. Ne pas hésiter à modifier l'échelle pour plus de lisibilité.

b. Placer sur C_f le point A d'abscisse 1 et le point B d'abscisse 2.

2 **a.** Construire un point C quelconque distinct de A et B sur C_f.

b. Tracer la droite (AC) et déplacer le point C pour tester différentes positions de cette droite.





c. Que se passe-t-il lorsque les points A et C sont confondus ? Comment l'expliquer ?

3 **a.** À l'aide de l'outil « Tangentes » de GeoGebra, tracer la tangente à la courbe représentative de f passant par le point A.

b. Où faut-il placer le point C pour que la droite (AC) soit presque confondue avec la tangente à C_f en A ?

c. Zoomer sur le point A. Que peut-on dire de la courbe représentative de f et de sa tangente en A au fur et à mesure que le zoom devient plus important ?

4 **a.** Tracer la tangente à la courbe représentative de f passant par B. Comment peut-on décrire cette droite ?

b. Que peut-on dire de la tangente à C_f en B et de la courbe représentative de f au fur et à mesure que l'on zoome sur le point B ?

5 **a.** Construire le point D d'abscisse -1 sur la courbe représentative de f.

b. Construire la tangente à la courbe représentative de f passant par D.

Aide

3 **a.** Après avoir sélectionné l'outil, il suffit de cliquer n'importe où sur la courbe puis sur le point A.

Bilan

Lorsque A et C sont deux points de la courbe C_f d'une fonction f, dans quelle situation peut-on dire que la droite (AC) est très proche de la tangente à C_f au point A ? Donner une définition intuitive de cette tangente.

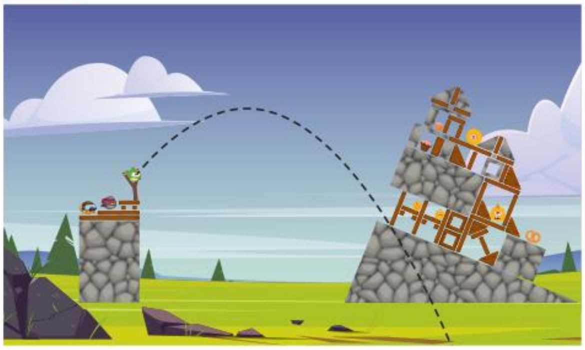
B Catapult Birds

Objectif **Utiliser et tracer à la main des tangentes.**

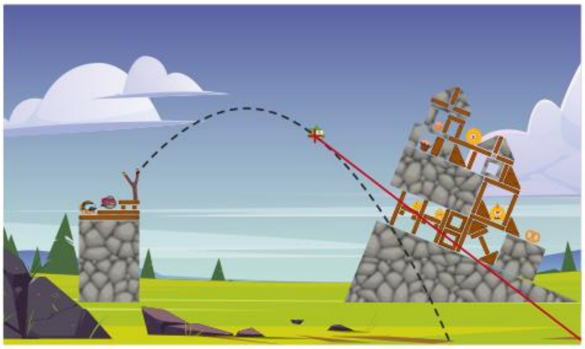
Dans un jeu mobile, le but est de catapulter des oiseaux pour atteindre des cochons. On peut choisir le début de la trajectoire de l'oiseau, qui correspond aux courbes en pointillés dans les différents documents.
En appuyant une première fois sur l'écran, l'oiseau est catapulté le long de cette trajectoire puis, en réappuyant sur l'écran lorsque l'oiseau est en l'air, celui-ci part en ligne droite (demi-droite rouge sur le **doc. 1 b.**).

Toutes les images sont à télécharger et à imprimer sur LLS.fr/EM1oiseau.

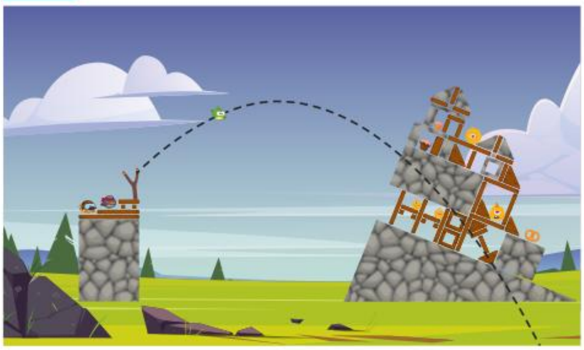
Doc. 1 **a.**



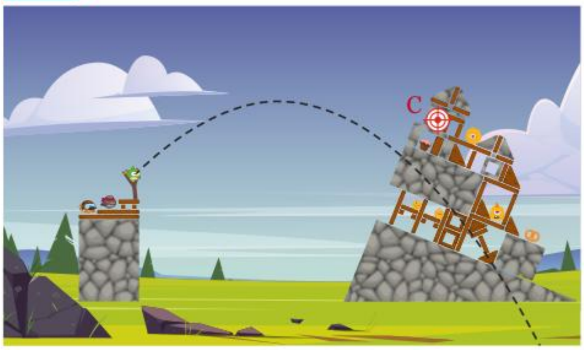
b.



Doc. 2



Doc. 3



Questions

1. Prolonger la demi-droite tracée dans le **doc. 1 b**. Comment s'appelle cette droite rouge que l'oiseau parcourt une fois que l'on tape une seconde fois sur l'écran ?
2. Après avoir catapulté l'oiseau, on réappuye sur l'écran à l'instant représenté au **doc. 2**. Tracer la fin de la trajectoire de l'oiseau.
3. Dans le **doc. 3**, on veut atteindre la cible C avec la trajectoire qui apparaît en pointillé. À quel endroit de la trajectoire doit-on réappuyer sur l'écran pour y parvenir ? Tracer alors la trajectoire de l'oiseau.

Bilan

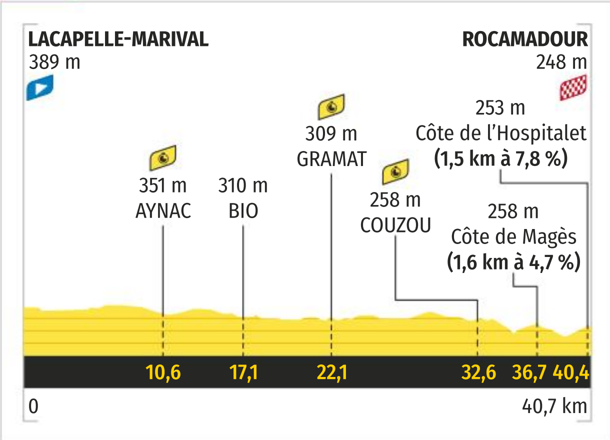
Expliquer comment tracer à la main, et de manière approchée, la tangente à une courbe en un point.

C Contre-la-montre

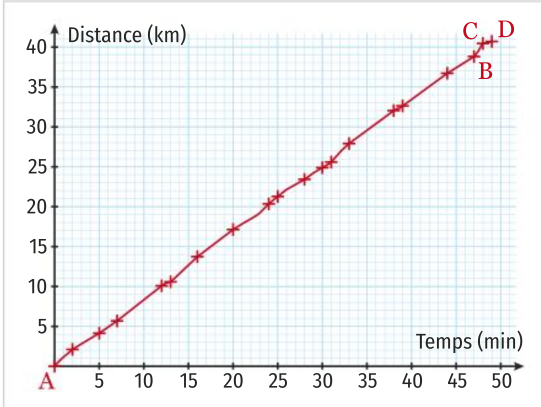
Objectif **Lien entre nombre dérivé et tangente à une courbe.**

La 20e étape du Tour de France 2022 est un contre-la-montre entre Lacapelle-Marival et Rocamadour.

Doc. 1 Profil de l'étape



Doc. 3 Prévision de la distance en fonction du temps



Doc. 2 Temps prévu aux points de passage principaux

À télécharger sur LLS.fr/EM1TDF1.

Questions

1. Décrire chacun des trois documents.

2. **a.** Télécharger et imprimer le **doc. 3** sur LLS.fr/EM1TDF2.

   b. Tracer la droite (AD) et calculer son coefficient directeur. Que représente ce nombre dans le contexte de l'activité ?

3. **a.** En utilisant le **doc. 2**, calculer la vitesse moyenne, en km/min, entre l'entrée de Rocamadour (D32-D673) et l'arrivée. Comment peut-on retrouver cette valeur graphiquement ?

   b. Comment peut-on décrire graphiquement les variations de la vitesse entre les points B et D ?

4. Tracer la tangente à la courbe au point C et déterminer graphiquement une valeur approchée de son coefficient directeur. Quelle interprétation peut-on en faire ? On appelle cette valeur le **nombre dérivé** au point C d'abscisse 48.

5. Comparer les vitesses instantanées à la 24e et la 28e minute. Les valeurs obtenues sont les nombres dérivés au point d'abscisse 24 et au point d'abscisse 28.

Aide

2 **b.** Le coefficient directeur de (AD) est donné par $\dfrac{y_D - y_A}{x_D - x_A}$.

Bilan

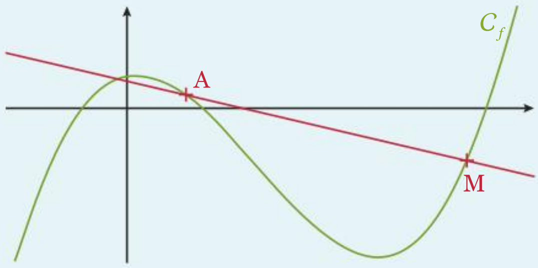
Comment peut-on déterminer un nombre dérivé en utilisant la tangente à une courbe en un point donné ? À quoi correspond ce nombre dérivé dans le contexte de l'activité ?

1 Tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction dont on note C_f la courbe représentative dans un repère orthogonal.

Définition

Si A et M sont deux points distincts de la courbe C_f, on dit que (AM) est une **sécante** à C_f.



Définition

Soit $\mathrm{A} \in C_f$. On appelle **tangente** à C_f en A, lorsqu'elle existe, la droite qui passe par A et qui est la position limite des sécantes (AM) lorsque le point M devient aussi proche que l'on veut du point A.

Dans la suite, on ne considèrera que des courbes qui admettent des tangentes en tout point.

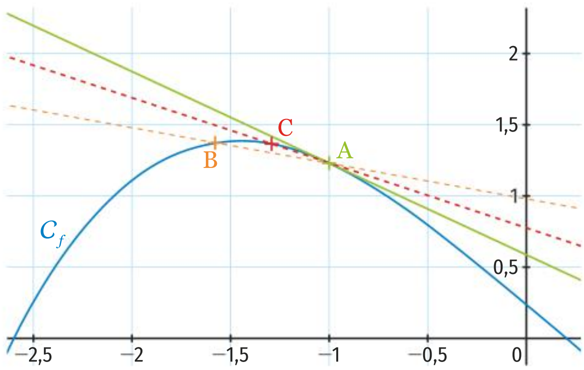
Exemple

f est une fonction représentée par la courbe C_f en bleu.

La droite (AB) est une sécante de C_f. Le segment $[\mathrm{AB}]$ est facile à distinguer par rapport à la courbe.

La droite (AC) est une autre sécante de C_f mais on constate que le segment $[\mathrm{AC}]$ est visuellement proche de la courbe autour des points A et C.

En vert, on a représenté la tangente à C_f passant par A. Au voisinage de A, la droite est presque confondue avec la courbe.

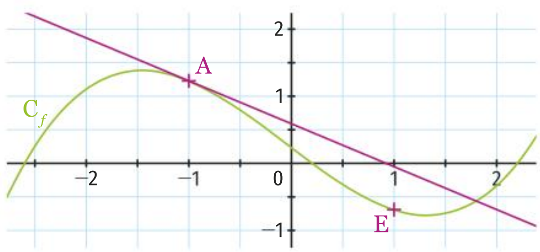


Propriété

En conservant les notations précédentes, la tangente obtenue est une approximation de la courbe au voisinage du point A. Si on zoome assez sur la courbe en A, la tangente et la courbe sont confondues.

Remarque Lorsque l'on s'éloigne de A, la tangente à C_f en A peut s'éloigner grandement de C_f : l'approximation précédente n'est plus forcément valable.

La droite violette est tangente à la courbe C_f au point A.
Au voisinage de ce point, la tangente constitue donc une bonne à approximation de C_f. En revanche, l'approximation n'est par exemple pas valable au voisinage du point E.

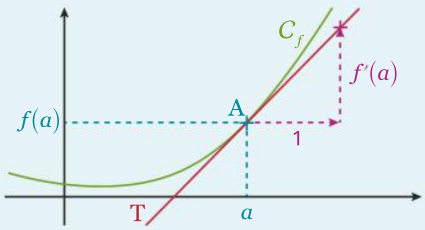


2 Nombre dérivé

Soit f une fonction dont on note C_f la courbe représentative dans un repère orthogonal et A un point d'abscisse a appartenant à C_f. Les coordonnées de A sont donc $(a ; f(a))$.
On suppose qu'il existe une tangente T à C_f en A.

Définition

Le coefficient directeur de la tangente T à C_f en A est appelé **nombre dérivé de f en a**. Il se note $f'(a)$.



Rappel Pour calculer le coefficient directeur d'une droite d, on utilise la méthode suivante.

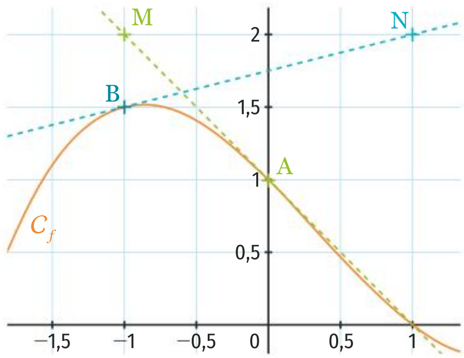
1. On choisit deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ appartenant à d. Il faut choisir des points A et B dont les coordonnées peuvent être lues ou calculées précisément.

2. On calcule le coefficient directeur de d à l'aide de la formule $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemples

On a représenté ci-contre une fonction f.

- La droite (AM) est la tangente à C_f au point $A(0 ; 1)$.
  Par lecture graphique, on détermine que le coefficient directeur de (AM) est $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = -1$. On en déduit que $f'(0) = -1$.
- La droite (BN) est la tangente à C_f au point $B(-1 ; 1{,}5)$. Par lecture graphique, on détermine que le coefficient directeur de (BN) est $\frac{y_N - y_B}{x_N - x_B} = 0{,}25$. On en déduit que $f'(-1) = 0{,}25$.



Remarque $f'(a)$ peut s'interpréter comme étant le **taux de variation instantanée** de f en a. En particulier, on a vu dans l'activité **C** que le nombre dérivé $f'(a)$ correspond à la vitesse instantanée en km/h au temps a lorsque $f(x)$ représente la distance parcourue en km au bout d'un temps x exprimé en heure.

Exemple

Une voiture est arrêtée à un feu rouge. Lorsque le feu passe au vert, la voiture avance et accélère progressivement. Si la voiture parcourt 100 mètres en 20 secondes, sa vitesse moyenne est
$V_m = \frac{d}{t} = \frac{100}{20} = 5$ m/s.

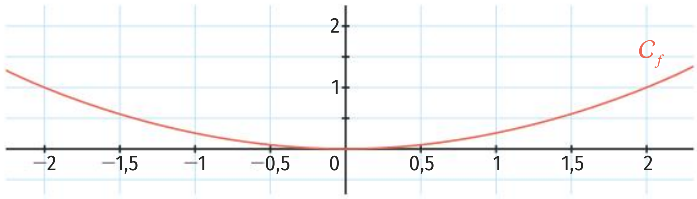
Notons $V(t)$ la vitesse de la voiture à n'importe quel instant t entre 0 s et 20 s.

$V(8)$ donne la **vitesse instantanée** en m/s. Cette vitesse est indiquée par le compteur de la voiture, en km/h, au bout de 8 secondes.

$V'(8)$ donne la variation de la vitesse au bout de 8 secondes. C'est ce qu'on appelle l'**accélération instantanée** de la voiture. L'accélération représente donc le taux de variation instantanée de la vitesse.

Méthode 1 Tracer la tangente à une courbe en un point

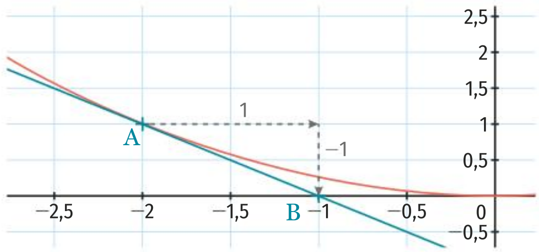
On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ dont on donne la courbe représentative C_f ci-dessous.



Tracer la tangente à C_f au point A d'abscisse −2 sachant que son coefficient directeur vaut −1.

Solution

Le point A d'abscisse −2 appartient à C_f donc son ordonnée est $f(-2)=\frac{1}{4}\times(-2)^2=1$.

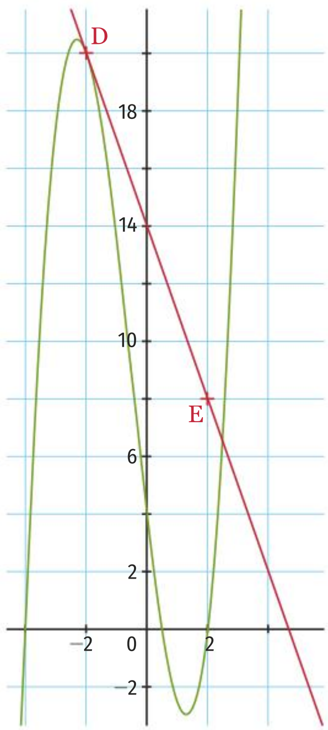


Méthode

- On calcule l'ordonnée du point A pour le placer correctement.
- En partant de A, on se décale d'une unité en suivant l'axe des abscisses puis du coefficient directeur −1 en suivant l'axe des ordonnées. Le point d'arrivée est noté B.
- On trace la droite (AB) qui est la tangente à C_f en A.

Méthode 2 Déterminer graphiquement un nombre dérivé

Soit g la fonction définie, pour tout réel x, par $g(x)=x^3+1{,}5x^2-9x+4$.
On note C_g sa représentation graphique. Soit $D(-2\,;20)\in C_g$ et T la tangente à C_g au point D. On admet que T passe par $E(2\,;8)$. Déterminer $g'(-2)$.



Méthode

- Il faut se rappeler qu'un nombre dérivé correspond au coefficient directeur de la tangente au point considéré.
- On utilise la formule $\frac{y_E-y_D}{x_E-x_D}$ pour calculer le coefficient directeur de la droite (DE).
- Le nombre obtenu correspond au nombre dérivé de g en −2.

Solution

$g'(-2)$ est le nombre dérivé de la fonction g en −2, donc $g'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_g au point d'abscisse −2.

Ainsi, $g'(-2)=\frac{8-20}{2-(-2)}=\frac{-12}{4}=-3$ donc le nombre dérivé de g au point D d'abscisse −2 est $g'(-2)=-3$.

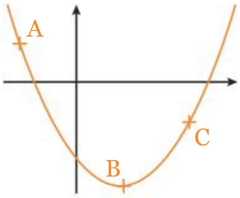
Méthode 1

À l'oral

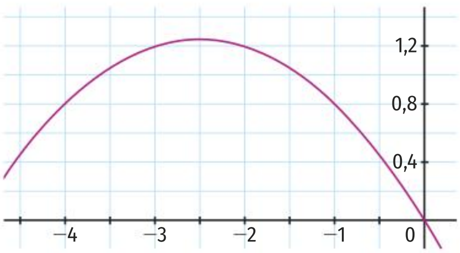
6 Soit d une droite et M un point de d.
Que peut-on dire de la tangente à d au point M ?

7 Soit C une courbe et A un point de C.
On note T la tangente à C en A.
Vrai ou faux : l'ordonnée du point A est le coefficient directeur de T ? Justifier.

8 **1.** Télécharger et imprimer la figure ci-contre sur LLS.fr/EM1Courbe8.
2. Tracer approximativement les tangentes à cette courbe aux points A, B et C.



9 **1.** Télécharger et imprimer la courbe ci-dessous sur LLS.fr/EM1Courbe9 ou la reproduire en prenant garde à l'échelle.
2. Tracer la tangente au point d'abscisse -3 sachant que son coefficient directeur vaut 0,2.
3. Tracer la tangente au point d'abscisse -1 sachant que son coefficient directeur vaut $-0{,}6$.



10 Soit f la fonction inverse définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
1. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 5]$.
2. Tracer la tangente au point d'abscisse 2 sachant que le coefficient directeur est $-0{,}25$.

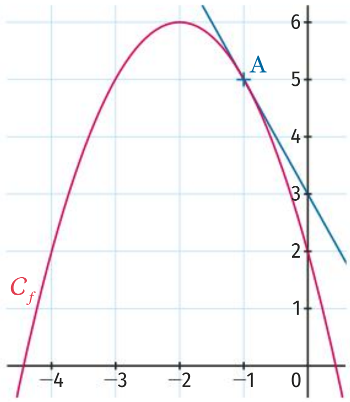
11 Soit f la fonction carré définie pour tout réel x. Les coefficients directeurs des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse -2 ; $-1{,}5$; -1 ; 0 ; 1 et 2 valent respectivement -4 ; -3 ; -2 ; 0 ; 2 et 4.
Tracer la représentation graphique de f en prenant en compte ces informations.

Méthode 2

À l'oral

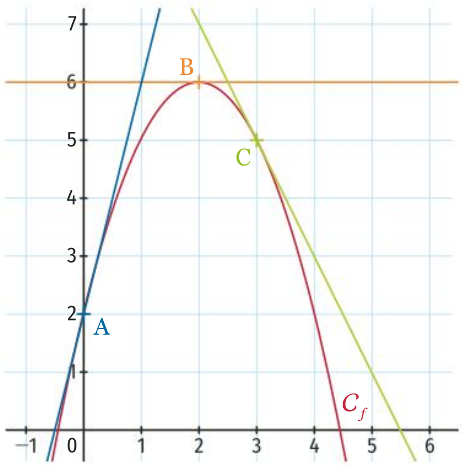
12 Si la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse a, quelle est la valeur de $f'(a)$? Justifier.

13 On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f et sa tangente au point A d'abscisse -1.



1. En utilisant les coordonnées de deux points, déterminer le coefficient directeur de cette tangente.
2. Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

14 La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Les droites tracées sont les tangentes à C_f en A, en B et en C. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.



15 Tracer une courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2)=-1$ et $f'(2)=3$.

1 Tangente à une courbe en un point

16 GeoGebra

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. À l'aide du logiciel GeoGebra, tracer la courbe représentative C_f de la fonction f.

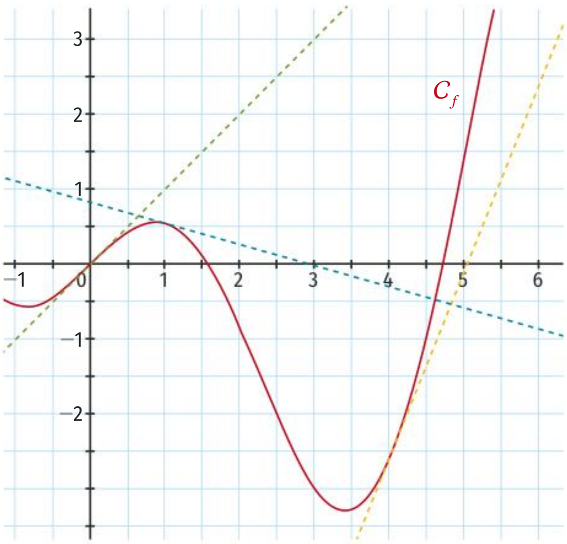
2. Placer sur C_f les points A, B, C et D d'abscisses respectives -4 ; $-1{,}5$; 0 et 3.

3. En utilisant les outils de GeoGebra, tracer les tangentes à C_f en ces points et donner leur coefficient directeur.

17

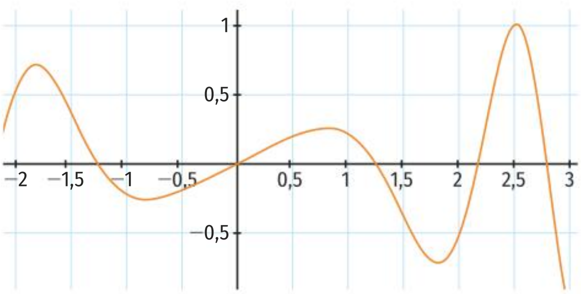
On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f et trois de ses tangentes.

Retrouver, pour chacune de ces tangentes, les abscisses des points de la courbe auxquelles elles sont tracées.



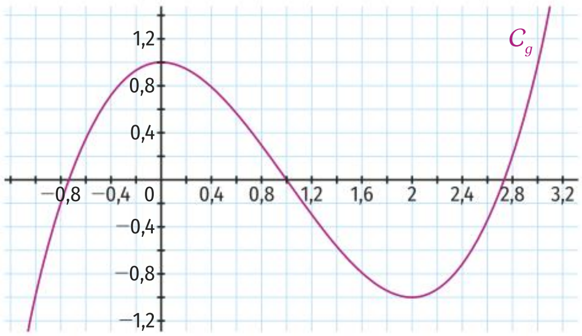
18

Télécharger et imprimer la courbe suivante sur LLS.fr/EM1Courbe18 puis tracer toutes ses tangentes horizontales.



19

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. On donne ci-dessous sa courbe représentative C_g.



1. Reproduire cette courbe ou la télécharger et l'imprimer sur LLS.fr/EM1Courbe19.

2. Tracer les tangentes à C_g suivantes.

a. Tangente au point A d'abscisse 0, de coefficient directeur 0.

b. Tangente au point B d'abscisse 1, de coefficient directeur $-1{,}5$.

c. Tangente au point C d'abscisse -1, de coefficient directeur 4,5.

d. Tangente au point D d'abscisse 3, de coefficient directeur 4,5.

20

1. Dans un repère orthogonal, placer les points suivants : $M(-2\,;3)$, $A(0\,;5)$, $T(3\,;4{,}5)$, $H(6\,;2)$ et $S(8\,;1)$.

2. a. Tracer la droite passant par M et de coefficient directeur 2.

b. Tracer la droite passant par A et de coefficient directeur 0.

c. Tracer la droite passant par T et de coefficient directeur $-0{,}5$.

d. Tracer la droite passant par H et de coefficient directeur -4.

e. Tracer la droite passant par S et de coefficient directeur $\frac{2}{3}$.

3. Tracer une courbe d'une fonction telle que :

- les points M, A, T, H et S appartiennent à cette courbe ;
- les droites tracées dans la question **2** sont toutes des tangentes à cette courbe respectivement aux points M, A, T, H et S.

21

Existe-t-il une courbe qui soit confondue avec au moins l'une de ses tangentes ? Si oui, tracer un exemple d'une telle courbe.

22 En chimie

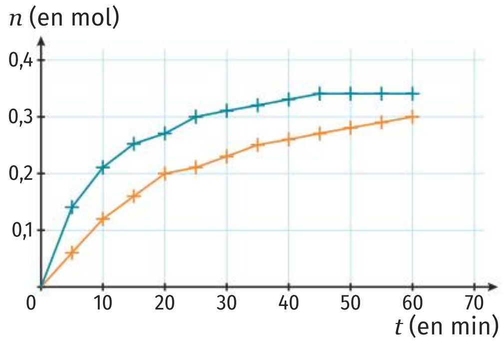
L'eau oxygénée H_2O_2 est utilisée de diverses manières : par les médecins comme antiseptique, par les coiffeurs pour décolorer les cheveux ou encore par l'industrie pour blanchir le papier par exemple.

L'eau oxygénée se décompose naturellement pour former de l'eau H_2O et du dioxygène O_2.

On réalise deux expériences : une première en plaçant de l'eau oxygénée seule dans un récipient fermé et une seconde expérience en ajoutant des ions ferriques Fe^{3+} dans le récipient.

Pour chaque expérience, on représente la quantité de matière n de dioxygène qui s'est formée, en mol, en fonction du temps, en minute, sur du papier millimétré.

Les croix bleues correspondent à l'expérience en présence de fer tandis que les croix orange correspondent à l'expérience sans fer.



On admet que le coefficient directeur de la tangente en un instant donné permet de quantifier la vitesse de réaction en mol/min.

1. Quelle réaction atteint 0,3 mol de dioxygène en premier ?

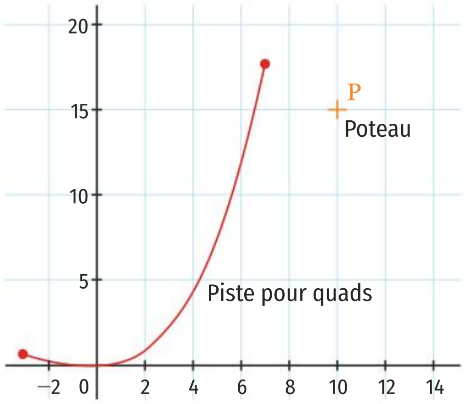
2. En chimie, un catalyseur est une espèce chimique qui n'est pas consommée au cours de la réaction mais qui joue le rôle d'accélérateur. Quelle espèce chimique est le catalyseur dans cet exercice ?

3. **a.** Déterminer graphiquement la vitesse des deux réactions au temps $t = 5$ min et au temps $t = 40$ min.

b. Comparer les vitesses de réaction obtenues en $t = 5$ pour chacune des réactions. Est-ce cohérent avec la question 3. **a.** ?

23

Une portion d'une piste pour quads est modélisée dans le repère orthogonal par la courbe ci-dessous.



Une jeune conductrice, téméraire et imprudente, est sortie de la piste et a continué sur sa lancée en suivant une trajectoire rectiligne définie par la tangente à la courbe et a heurté, sans se blesser, le poteau situé aux coordonnées $(10\ ;\ 15)$.

Déterminer graphiquement et approximativement en quel point la conductrice a quitté la piste.

24 Fil rouge

L'équipe d'un pilote de formule 1 mesure qu'il passe de 0 km/h à 100 km/h en un peu plus de 3 secondes. Pour dimensionner les équipements de protection, les ingénieurs ont synthétisé les vitesses atteintes par le pilote sur cette phase d'accélération.

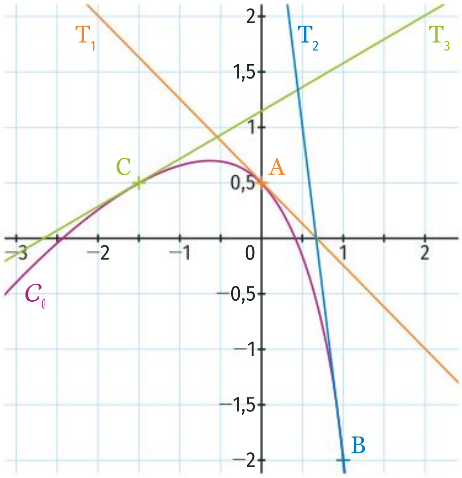
On admet que le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse t permet d'estimer l'accélération du pilote à l'instant t.

Déterminer, de manière approximative, deux instants auxquels le pilote accélère de la même manière.

2 Nombre dérivé

25

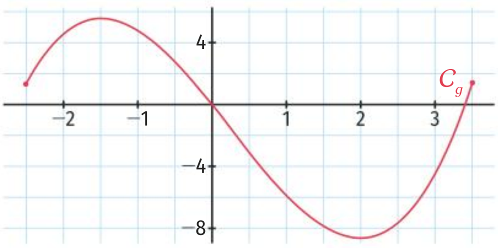
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction ℓ et trois de ses tangentes T_1, T_2 et T_3 respectivement aux points A, B et C.



Déterminer graphiquement $\ell'(0)$, $\ell'(1)$ et $\ell'(-1{,}5)$.

26

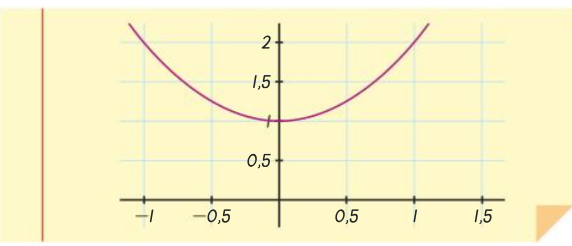
La courbe ci-dessous représente une fonction g définie sur $[-2{,}5\ ;\ 3{,}5]$.



Déterminer graphiquement en quelles valeurs le nombre dérivé de g est nul sur $[-2{,}5\ ;\ 3{,}5]$.

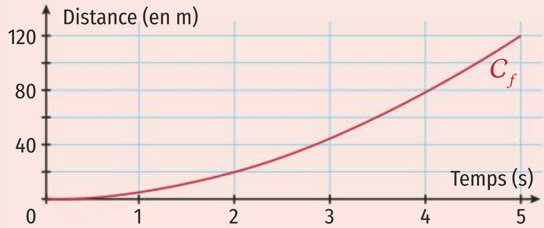
27 Copie d'élève

Un enseignant donne l'énoncé suivant à ses élèves.
Tracer la représentation graphique d'une fonction f pour laquelle $f'(0) = 1$.
Enzo propose la courbe suivante. Expliquer son erreur.



28 Fil rouge

En formule 1, la recherche des meilleures performances impose aux écuries d'utiliser les technologies les plus précises possibles pour déterminer la position, la vitesse et l'accélération de leur voiture durant la course.
On a mesuré et représenté les grandeurs caractéristiques sur les cinq premières secondes de la course d'un pilote en ligne droite.
La fonction donnant la distance parcourue par le pilote en fonction du temps est notée f.



1. a. Déterminer $f'(2)$ à l'aide du premier graphique.

b. Peut-on retrouver ce résultat à l'aide du graphique donnant la vitesse en chaque instant ?

2. a. Tracer la tangente à la courbe de la fonction vitesse en n'importe quel point. Qu'observe-t-on ?

b. Que peut-on en déduire concernant l'accélération du pilote ?

3. La vitesse s'exprime en m/s car elle représente une variation de la distance (exprimée en m) en fonction du temps (exprimé en s).

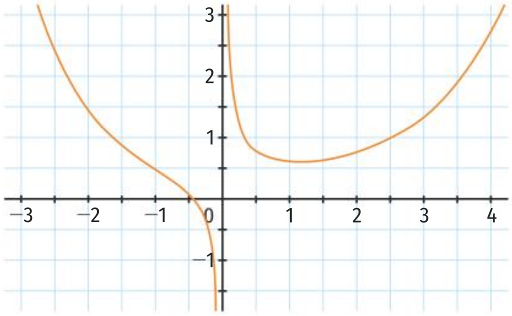
a. De la même manière, l'accélération représente une variation de la vitesse en fonction du temps. En quelle unité peut-on alors exprimer l'accélération ?

b. D'après le graphique, à combien est égale l'accélération du pilote pendant les cinq premières secondes ?

Remarque Dans cette situation, il est courant de compter l'accélération en g. Un g vaut 9,81 m/s² et correspond à l'accélération de la pesanteur sur Terre. Ainsi, lorsque l'on dit qu'un pilote subit une accélération de 2 g, cela signifie qu'il subit le double de l'accélération de la pesanteur sur Terre.

29

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie pour tout $x \neq 0$.



Télécharger la courbe sur LLS.fr/EM1Courbe29 et compléter le tableau suivant le plus précisément possible.

a	−2	−1	1	2	3
$f(a)$					
$f'(a)$					

30 Exercice inversé

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ dont on donne certains nombres dérivés dans le tableau de valeurs suivant.

a	−4	−2	0	2	4
$g'(a)$	0	1	2	−0,5	2

Tracer une courbe représentative possible pour la fonction g.

31

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 7$.

a. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

b. Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 ?

c. En déduire graphiquement la valeur de $f'(3)$.

d. Répondre aux questions **b** et **c** avec le point d'abscisse −4.

2. Si f est une fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$ et si a est un nombre réel, quelle est la valeur de $f'(a)$? Détailler le raisonnement.

32

Une fonction f est telle que $f'(-1) = f'(2)$. Que peut-on dire des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses respectives −1 et 2 ?

33 En SES

Une entreprise fabrique et commercialise des cahiers de 96 pages de dimensions 24×32 cm.
On note x le nombre de cahiers produits et $\mathrm{C}(x)$ le coût de production, en euro, de ces x cahiers.
Un audit de l'entreprise a permis d'estimer que $\mathrm{C}(x) = 3 \times 10^{-9} \times x^3 - 5{,}1 \times 10^{-5} \times x^2 + 2{,}1x$.

1. a. Calculer le coût de production de 10 000 cahiers.

b. En déduire le coût moyen de production d'un seul cahier sur cette production de 10 000 cahiers.

2. On appelle **coût marginal** de x cahiers produits la différence $\mathrm{C}(x+1) - \mathrm{C}(x)$.

Parmi les choix suivants, quel est celui qui interprète le mieux le coût marginal ?

- Le coût de production de x cahiers.
- Le coût de production d'un cahier.
- La variation du coût de production induite par la production d'un cahier supplémentaire.
- Le bénéfice de l'entreprise.

3. Calculer et interpréter le coût marginal lorsque $x = 10\,000$.

4. a. Comparer le coût moyen de production obtenu à la question **1** et le coût marginal obtenu à la question **3** pour $x = 10\,000$.

b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Remarque En économie, le coût marginal de x peut parfois être assimilé au nombre dérivé de C en x.

Défis !

34 Un automobiliste peut-il être verbalisé pour excès de vitesse par un radar fixe alors qu'il ne l'a pas été par un radar-tronçon ?

Et inversement, un automobiliste peut-il avoir été verbalisé pour excès de vitesse par un radar-tronçon sans l'avoir été par un radar fixe ?

35 Existe-t-il une courbe qui soit située au-dessus de toutes ses tangentes ? Si oui, tracer une telle courbe sans justifier l'affirmation.

36 Tracer une courbe qui n'admet pas de tangente en au moins un de ses points.

Remarque Cette double-page permet d'approfondir les notions de ce chapitre et de travailler de façon différenciée avec les élèves de la classe, notamment avec les plus à l'aise en mathématiques ou bien avec celles et ceux qui souhaiteraient choisir l'option mathématiques complémentaires en terminale.

Cours

Définition du nombre dérivé et équation de tangente

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel appartenant à I.

On dit que f est **dérivable en a** lorsque la limite du **taux d'accroissement** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, quand h prend des valeurs aussi proches que l'on veut de 0, est un nombre réel.

Ce réel, noté $f'(a)$, est appelé **nombre dérivé de f en a**.

On écrit alors $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors, pour tout $a\in\mathrm{I}$, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est donnée par $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

37 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

1. Soit h un réel non nul. Exprimer $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ en fonction de h.

2. Montrer que f est dérivable en $a=1$ et déterminer $f'(1)$.

38 Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par $f(x)=x^3$. On souhaite déterminer, pour tout $a\in\mathbb{R}$, la valeur de $f'(a)$.

Soit h un nombre réel non nul.

1. Montrer que, pour tous réels a et h :

$$(a+h)^3=a^3+3a^2h+3ah^2+h^3.$$

2. Écrire le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$. Simplifier l'expression obtenue au maximum.

3. En déduire que $f'(a)=3a^2$.

4. Quelle est la valeur de $f'(1)$? De $f'(3)$?

39 GeoGebra Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Soit h un réel strictement positif.

1. Montrer que $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

2. Que peut-on dire de ce quotient lorsque h devient aussi proche que l'on veut de 0 ?

3. a. La fonction f est-elle définie pour $x=0$?

b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

4. À l'aide de GeoGebra, tenter de tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x=0$.
Que remarque-t-on ? Justifier graphiquement que le nombre dérivé de f en 0 n'existe pas.

40 Soit f une fonction dont on note C_f la courbe représentative. Soit h un réel strictement positif.
On considère les points A d'abscisse a et B d'abscisse $a+h$ appartenant tous les deux à C_f.

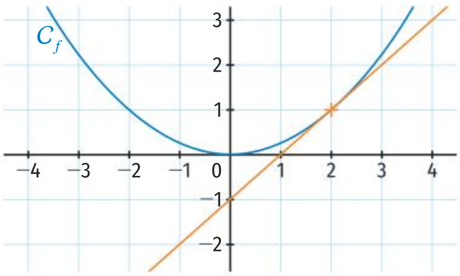
1. Donner l'ordonnée du point A et du point B en fonction de a et h.

2. Calculer et simplifier le coefficient directeur de la droite (AB). Quel nombre retrouve-t-on ?

3. a. Que peut-on dire des points A et B lorsque le nombre h devient aussi proche que l'on veut de 0 ?

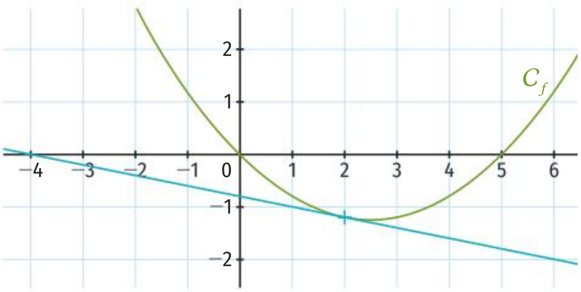
b. Quelle propriété retrouve-t-on sur les tangentes et les sécantes ?

41 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe représentative C_f ci-dessous.



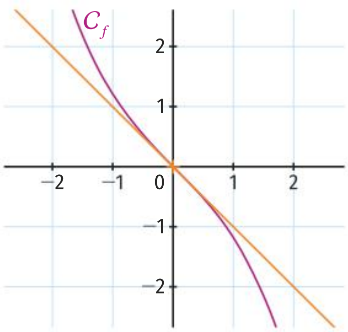
Déterminer par lecture graphique l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f dessinée en orange au point d'abscisse 2.

42 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Déterminer par lecture graphique l'équation réduite de la tangente à la courbe de f dessinée en bleu au point d'abscisse 2.

43 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

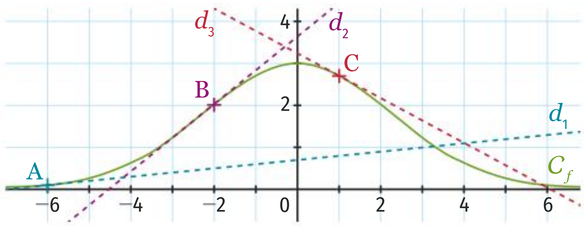


1. Déterminer graphiquement l'équation réduite de la tangente à la courbe de f dessinée en orange au point d'abscisse 0.

2. Retrouver ce résultat en utilisant la propriété de la page précédente.

44 L'objectif de cet exercice est de conjecturer une propriété portant sur les nombres dérivés des fonctions paires.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction paire f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que trois de ses tangentes.
On donne leurs équations : $d_1 : y = 0{,}1x + 0{,}67$; $d_2 : y = 0{,}8x + 3{,}62$ et $d_3 : y = -0{,}54x + 3{,}26$.



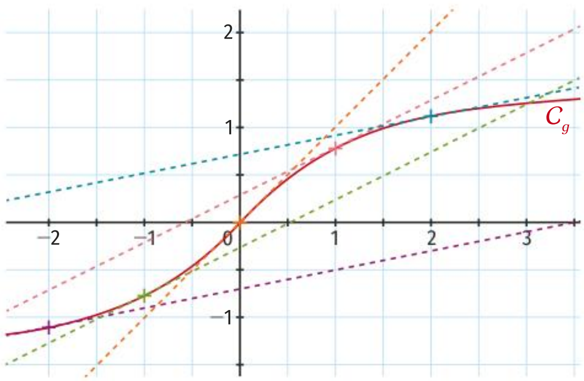
1. a. Comment observe-t-on graphiquement que la fonction f est paire ?

b. Déterminer la valeur de chacun des nombres suivants : $f'(-6)$, $f'(-2)$ et $f'(1)$.

2. a. En justifiant à l'aide de propriétés graphiques, déterminer $f'(6)$, $f'(2)$ et $f'(-1)$.

b. Dans le cas général, quelle relation entre $f'(a)$ et $f'(-a)$ peut-on conjecturer pour tout réel a lorsque f est une fonction paire ?

45 On souhaite déterminer dans cet exercice un résultat pour les fonctions impaires analogue à celui étudié à l'exercice **44** pour les fonctions paires.
On a représenté ci-dessous une fonction g impaire.



1. Comment observe-t-on graphiquement que cette fonction est impaire ?

2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés suivants et les reporter dans le tableau.

a	−2	−1	0	1	2
$g'(a)$					

3. Quel lien peut-on conjecturer entre $g'(a)$ et $g'(-a)$ lorsque g est une fonction impaire ?

Ça flashe pour moi

Doc. 1 Itinéraire GPS

Point de départ : 13 rue de la Tangente
Point d'arrivée : Leibniz Burger

9 min (8,2 km) via A272 et A314

› Prendre rue de la Tangente (400 m)
› Tourner à gauche sur la rue Varignon (600 m)
⚠ **Radar dans 200 m** 50 km/h
› Prendre D693 en direction de A272 (700 m)
› Prendre A272 en direction de A314 (1,1 km)
⚠ **Radar dans 600 m** 90 km/h
› Prendre A314 (4,5 km)
⚠ **Radar dans 500 m** 130 km/h
⚠ **Radar-tronçon à 3 km (sur 1 km)** 130 km/h
› Prendre la sortie n° 24 sur rond-point Fixe (400 m)
› Au rond-point prendre la deuxième sortie
› Continuer jusqu'à Leibniz Burger (500 m)
⚠ **Radar dans 400 m** 30 km/h
Vous êtes arrivé à destination !

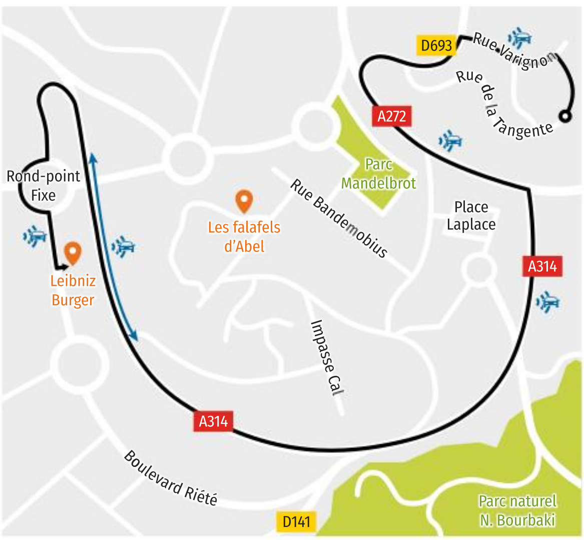
Doc. 2 Amendes suite à un contrôle automatique de vitesse

En France, les excès de vitesse sont passibles au minimum d'une amende et d'un retrait de points du permis. Dans les cas les plus graves, les sanctions peuvent aller jusqu'à la suspension de permis voire à l'emprisonnement.
Pour un contrôle automatique de vitesse, les amendes sont les suivantes.

- Pour un excès de vitesse inférieur à 20 km/h :
  - 68 € pour une limitation supérieure à 50 km/h ;
  - 135 € pour une limitation inférieure ou égale à 50 km/h.
- Pour un excès de vitesse compris entre 20 km/h et 50 km/h : 135 €.
- Pour un excès de vitesse supérieur à 50 km/h : 1 500 € et 3 750 € en cas de récidive.

Doc. 3 L'itinéraire de Sébastien

Si nécessaire, il est possible de télécharger ce plan sur LLS.fr/EM1Plan.



Doc. 4 Radars-tronçons

Un radar-tronçon est un radar automatique qui mesure la vitesse moyenne d'un véhicule entre deux points distants de plusieurs centaines de mètres, voire de plusieurs kilomètres. Il relève alors la plaque d'immatriculation des véhicules en excès de vitesse, qui recevront chez eux la contravention.

Doc. 5 Courbe à télécharger

Le graphique indiquant la distance parcourue par Sébastien en fonction du temps est à télécharger et à imprimer sur LLS.fr/EM1Parcours.

Question

En retard pour rejoindre ses amis, Sébastien est sûr d'avoir dépassé les limitations de vitesse sur le trajet.
À l'aide des documents ci-dessus, déterminer le montant de l'amende que Sébastien va recevoir.

Fil rouge du chapitre

1 Mesure de l'accélération subie par un pilote

Sujet : Lors d'une course, les multiples accélérations et décélérations se révèlent éprouvantes pour les pilotes de formule 1 qui doivent supporter des forces colossales tout en conservant une conduite irréprochable.

Comment estimer la valeur de l'accélération subie par un pilote de formule 1 lorsqu'il accélère ou lorsqu'il freine avec son véhicule ?

Pistes de recherche :

- Quel est le lien entre position, vitesse instantanée et accélération instantanée ?
- Que signifie l'unité g ?
- Comment calculer le nombre de g subis par le pilote ?
- Comment ce nombre s'interprète-t-il ?
- Jusqu'à combien de g un pilote peut-il subir lors d'une course automobile ?

Fil rouge :

- Ex. 24 p. 115
- Ex. 28 p. 116

POUR UNE RECHERCHE INTERNET EFFICACE

- Ne pas se limiter à Wikipédia.
- Pour valider une information, confronter plusieurs sources.
- Chercher plusieurs mots-clés autour du thème principal.

2 Le coût marginal

Sujet : Le nombre dérivé présente des applications dans le domaine de l'économie. C'est notamment le cas de la notion de coût marginal, qui sert à analyser certaines décisions de production.

Quels liens existe-t-il en économie entre le nombre dérivé et le coût marginal ?

Pistes de recherche :

- Qu'est-ce que le coût marginal ?
- Que modélise-t-il ?
- Comment se calcule-t-il ?
- Quel est le lien avec le nombre dérivé ?
- Dans quel cas le coût marginal indique-t-il qu'il est pertinent d'augmenter la production ? De la diminuer ?

CONSEILS POUR L'ORAL

- Se tenir droit.
- Ne pas mettre les mains dans ses poches.
- Bien regarder les personnes en face de soi.

6 Variations globales

Objectifs du chapitre :

1. Connaître les dérivées des fonctions constante, identité, carré et cube.

2. Déterminer la dérivée d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par un nombre réel, d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

3. Utiliser la fonction dérivée pour étudier les variations d'une fonction et ses extremums.

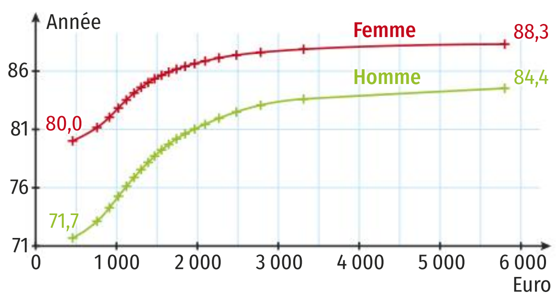
Fil rouge du chapitre

Comment les dimensions des canettes de soda sont-elles choisies ?

Exercices rituels

Pour les exercices **1** *à* **3**

Le graphique suivant représente l'espérance de vie des femmes et des hommes en France selon leur niveau de vie mensuel.



1 Sur ce graphique, que représente un carreau sur l'axe vertical ? Sur l'axe horizontal ?

2 Décrire et interpréter les variations des courbes verte et rouge.

3 Avec la précision permise par le graphique :

1. déterminer l'espérance de vie d'une femme dont le niveau de vie mensuel est de 800 € ;

2. déterminer l'espérance de vie d'un homme dont le niveau de vie mensuel est de 4 500 € ;

3. donner l'espérance de vie maximale des femmes.

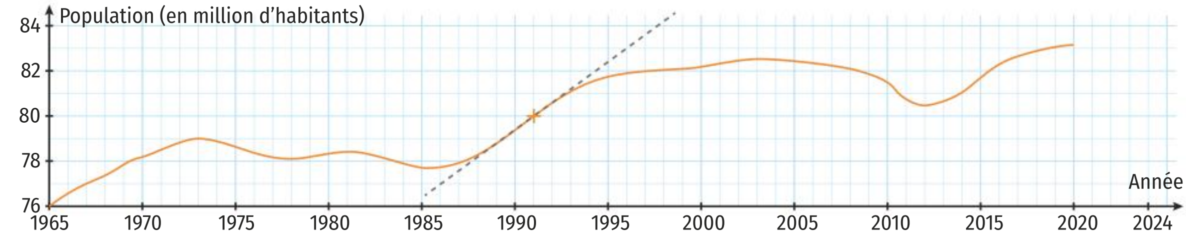
D'autres exercices rituels p. 10 ou sur LLS.fr/EM1Rituels

A Étude d'un modèle démographique

Objectif **Construire la fonction dérivée à partir du nombre dérivé.**

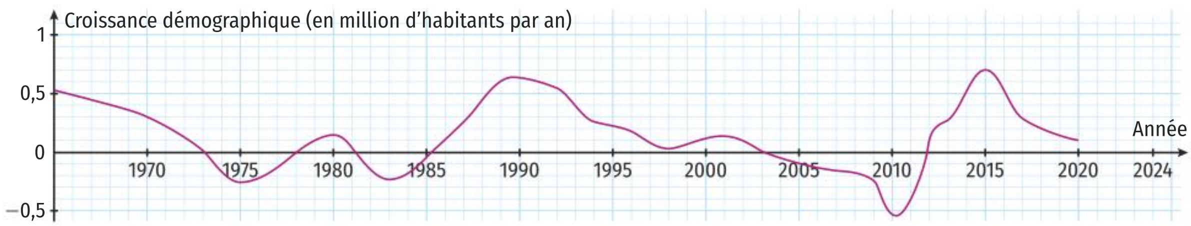
Doc. 1 Évolution de la population allemande de 1965 à 2020

La courbe ci-dessous représente l'évolution de la population allemande, en million d'individus, entre 1965 et 2020.



Doc. 2 Étude de la croissance démographique allemande de 1965 à 2020

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la **croissance démographique** de la population allemande, en million d'individus par année. D'après le site de l'Insee, cette fonction donne « la variation de l'effectif d'une population au cours de l'année, qu'il s'agisse d'une augmentation ou d'une diminution. À chaque année, la courbe du **doc. 2** associe donc le nombre dérivé correspondant à la même année de la courbe du **doc. 1**.



La croissance démographique est la **fonction dérivée** de la fonction représentée dans le **doc. 1** : c'est elle qui indique à quelle vitesse la population augmente ou diminue chaque année.

Questions

1. Décrire les variations de la population allemande de 1965 à 2020.
2. On rappelle que la tangente à une courbe en un point d'abscisse a est horizontale lorsque le nombre dérivé de la fonction en a est nul. En quelles années la courbe représentive de la population allemande admet-elle des tangentes horizontales ? Interpréter ce résultat en termes de croissance démographique.
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe tracée à l'année 1991. Comment peut-on retrouver cette valeur à l'aide de la courbe du **doc. 2** ?
4. En utilisant le **doc. 2**, déterminer la croissance démographique allemande en 2015. Comment peut-on retrouver ce résultat en utilisant le **doc. 1** ?
5. Décrire l'évolution de la population entre 2010 et 2020 en utilisant chacune des deux courbes.

Bilan

Si f est une fonction, comment peut-on définir sa fonction dérivée ?

B Usain Bolt

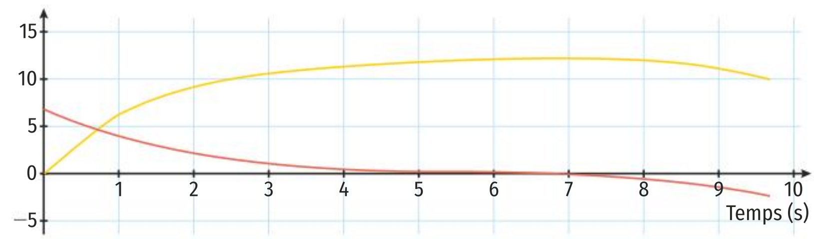
Objectif **Faire le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée.**

Doc. 1 100 m d'Usain Bolt

Dans une feuille de calcul, on a recensé les temps intermédiaires d'Usain Bolt au 100 m lors des Jeux olympiques de Pékin de 2008.
Le logiciel utilisé détermine une fonction qui donne la distance parcourue en fonction du temps à partir des données saisies. La vitesse instantanée est la fonction dérivée de la fonction distance : à chaque instant, elle associe le nombre dérivé de la distance, en m/s.

	A	B	C	D	E
1	Temps cumulé (s)	Distance (m)	Vitesse instantanée (m/s)	Vitesse moyenne d/t (m/s)	Accélération instantanée (m/s²)
2	0	0	0	0	0
3	1,85	10	8,82	5,41	2,35
4	2,87	20	10,54	9,8	1,14
5	3,78	30	11,28	10,99	0,57
6	4,65	40	11,65	11,49	0,32
7	5,5	50	11,88	11,76	0,23
8	6,32	60	12,04	12,2	0,16
9	7,14	70	12,11	12,2	0
10	7,96	80	11,98	12,2	-0,37
11	9,79	90	11,41	12,05	-1,06
12	9,69	100	9,93	11,11	-2,32

Doc. 2 Vitesse et accélération instantanées : à télécharger sur LLS.fr/EM1Vitesse



La feuille de calcul du **doc. 1** donne le graphique ci-contre : la courbe en jaune représente la vitesse instantanée, en m/s, et la courbe en rouge la fonction dérivée de la vitesse instantanée qui représente l'accélération instantanée, en m/s².

Questions

1 Dans le **doc. 1**, on s'intéresse aux temps réalisés par Usain Bolt sur le 100 m en finale des Jeux olympiques de Pékin de 2008.

a. Calculer la vitesse moyenne d'Usain Bolt sur les 10 premiers mètres de la course. Convertir en km/h.

b. Calculer sa vitesse moyenne entre le 10ᵉ et le 20ᵉ mètre de la course.

c. D'après les données du **doc. 1**, quelle est sa vitesse maximale ? Au bout de combien de temps l'atteint-il ?

2 Quelle formule a-t-on pu entrer en **D3** pour calculer les vitesses moyennes sur chaque tronçon de 10 m ?

3 Le **doc. 2** permet de comparer les variations de la vitesse instantanée et les valeurs de l'accélération instantanée.

a. Comment évolue la vitesse d'Usain Bolt lorsque sa dérivée, l'accélération, a des valeurs élevées ?

b. Que peut-on dire de la vitesse à partir de 7 s ? Qu'en est-il de l'accélération ?

Bilan

Comment le signe de l'accélération permet-il de déterminer les variations de la vitesse ?
Quel lien peut-on conjecturer entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée ?

C Un problème d'optimisation

Objectif **Comprendre comment on utilise des modèles mathématiques dans la vie courante.**

Afin d'optimiser les coûts de fabrication, on s'intéresse aux dimensions d'une casserole pour un volume fixé.

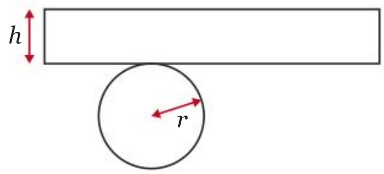
Doc. 1 **Diamètres et contenances de casseroles vendues dans le commerce**

Diamètre	18 cm	20 cm	22 cm	24 cm	26 cm	28 cm	30 cm	34 cm
Volume	2,2 L	3,1 L	4,2 L	5,4 L	6,9 L	8,4 L	10,6 L	15,4 L

Doc. 2 **Minimiser un coût**

On suppose qu'une casserole est assimilée à un cylindre de volume fixé sans couvercle. Afin de réduire les coûts de production, les usines cherchent à minimiser la quantité de matériau nécessaire pour construire ce qui correspond au patron du solide formant la casserole. Ce patron permet alors d'obtenir la surface latérale et le fond de la casserole.

Doc. 3 **Patron d'une casserole**



Questions

1 **a.** En reprenant les notations du **doc. 3**, exprimer le volume V de la casserole en fonction de sa hauteur h et de son rayon r. En déduire que la hauteur de la casserole est égale à $\frac{V}{\pi r^2}$.

b. Calculer la hauteur, exprimée en centimètre, d'une casserole de diamètre 26 cm.

2 **a.** Déterminer l'aire S du patron représenté dans le **doc. 3** en fonction de h et de r.

b. À l'aide de la question **1 a.**, montrer que $S = \frac{2V}{r} + \pi r^2$.

3 On admet que la fonction S est dérivable par rapport au rayon r et que, pour tout $r > 0$, $S'(r) = \frac{2}{r^2}(\pi r^3 - V)$.

a. Quel est le signe de r^2 ? En déduire que le signe de $S'(r)$ est le même que celui de $\pi r^3 - V$.

b. Justifier que l'inéquation $\pi r^3 - V \geqslant 0$ est équivalente à $r \geqslant h$.

c. En déduire les variations de la fonction S. À quelle condition sur r la surface S est-elle minimale ?

d. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'activité.

Aide

1 b. On rappelle que $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$.

Aide

2 a. Le patron de la casserole est formé d'un disque et d'un rectangle.

Aide

3 b. On rappelle que $V = \pi r^2 h$.

Bilan

De quelle manière a-t-on utilisé la notion de fonction dérivée pour optimiser le coût de fabrication d'une casserole ?

1 Fonction dérivée

Définitions

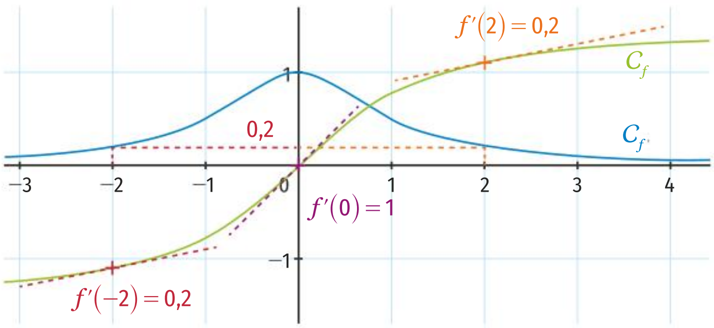
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **dérivable** sur I lorsque, pour tout $x \in \mathrm{I}$, le nombre dérivée de f en x existe. Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de f** la fonction notée f' qui, à chaque nombre x de l'intervalle I, associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Notations La fonction dérivée de f se note f' ou bien $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Cette notation, due au mathématicien Leibniz, met en évidence la construction de la fonction dérivée de f à partir des taux d'accroissement en chaque point : $\mathrm{d}f(x)$ désigne la petite variation des ordonnées créée par une petite variation des abscisses $\mathrm{d}x$.

Exemple

La courbe verte représente une fonction f. Pour construire la courbe représentant f' (en bleu), on trace en chaque point d'abscisse x la tangente à la courbe représentative de f et on détermine son coefficient directeur.

Par exemple, en $x = 2$, la tangente à C_f a pour coefficient directeur 0,2 donc $f'(2) = 0{,}2$.



2 Dérivées des fonctions de référence

Propriétés

Toute fonction polynomiale admet une fonction dérivée définie sur $\mathbb{R}$. En particulier, les fonctions affines, carré et cube admettent les fonctions dérivées suivantes.

Fonction	Constante : $f(x) = p$	Identité : $f(x) = x$	Carré : $f(x) = x^2$	Cube : $f(x) = x^3$
Fonction dérivée	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = 3x^2$

Propriétés

Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

1. La somme $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $k \times f$ est dérivable sur I et $(k \times f)' = k \times f'$.

Remarque Si f est une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, alors $f'(x) = m \times 1 + 0 = m$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times 3x^2 + 4 \times 2x + 3 \times 1 + 0 = 15x^2 + 8x + 3$.

3 Étude des variations d'une fonction

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit J un intervalle inclus dans I.

1. f est strictement croissante sur J si, et seulement si, f' est strictement positive sur J.

2. f est strictement décroissante sur J si, et seulement si, f' est strictement négative sur J.

3. f est constante sur J si, et seulement si, f' est nulle sur J.

Remarque En étudiant les variations d'une fonction, on peut en déduire l'existence éventuelle de maximum ou de minimum.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + 5x - 2$. On souhaite déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses éventuels extremums.

Pour cela, on détermine la fonction dérivée de f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4 \times 2x + 5 \times 1 - 0 = -8x + 5$.

La fonction f' est une fonction affine dont le coefficient directeur, égal à -8, est négatif. Elle est donc décroissante. On détermine la valeur de x pour laquelle elle s'annule :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}.$$

On en déduit alors le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

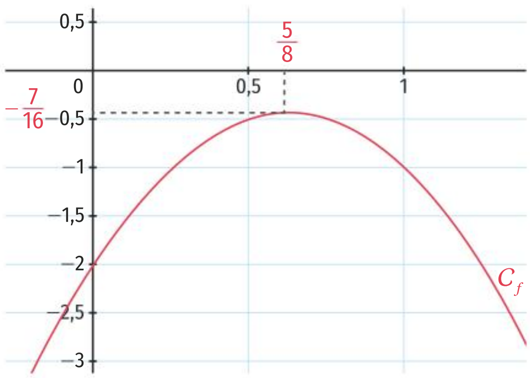
Ainsi, sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{5}{8}\right]$, f' est positive donc f est croissante et, sur l'intervalle $\left[\frac{5}{8}\,;+\infty\right[$, f' est négative donc f est décroissante. On résume cela dans un tableau de variations.

x	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	

f admet donc un maximum atteint en $x = \frac{5}{8}$.

Ce maximum vaut $f\left(\frac{5}{8}\right) = -4 \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 + 5 \times \frac{5}{8} - 2 = -\frac{25}{16} + \frac{25}{8} - 2 = -\frac{7}{16}$.

On remarque que le maximum de f est un nombre négatif. On peut en déduire que la fonction f est toujours négative.



Méthode 1 Déterminer l'expression de la dérivée d'une fonction polynomiale

Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par $f(x) = -2x^3 + 0{,}5x^2 + 0{,}2x - 1$.
Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

Solution

Pour tout réel x,
$f(x) = -2 \times x^3 + 0{,}5 \times x^2 + 0{,}2 \times x - 1$ donc
$f'(x) = -2 \times 3x^2 + 0{,}5 \times 2x + 0{,}2 \times 1 - 0$.
En simplifiant, on obtient, pour tout réel x, $f'(x) = -6x^2 + x + 0{,}2$.

Méthode

- Dans l'expression de f, on fait apparaître les fonctions de référence x^3, x^2 et x, ainsi que les nombres par lesquels elles sont multipliées.
- Pour déterminer l'expression de f', on calcule les dérivées respectives pour faire apparaître les expressions $3x^2$, $2x$ et 1.
- On simplifie l'expression.

Attention : on ne dérive qu'une seule fois ! Les termes en x^2 qui apparaissent dans l'expression de f' ne doivent pas être remplacés par $2x$.

Méthode 2 Utiliser l'expression de la fonction dérivée pour déterminer une tangente horizontale

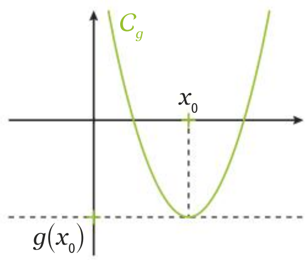
Soit g la fonction définie sur $[-10 ; 10]$ par $g(x) = 1{,}2x^2 - 6x - 1$.
La courbe représentative de g admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ? Si oui, donner une équation de chacune de ces tangentes.

Solution

Soit $x \in [-10 ; 10]$.
Il existe une tangente horizontale au point d'abscisse x si, et seulement si, $g'(x) = 0$.
Or, pour tout $x \in [-10 ; 10]$,
$g'(x) = 1{,}2 \times 2x - 6 - 0 = 2{,}4x - 6$.
On a alors :
$2{,}4x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2{,}4x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{2{,}4} \Leftrightarrow x = 2{,}5$.
Finalement, il existe une et une seule tangente horizontale, au point d'abscisse 2,5.
Par ailleurs, $g(2{,}5) = 1{,}2 \times 2{,}5^2 - 6 \times 2{,}5 - 1 = -8{,}5$ donc l'équation réduite de cette tangente est $y = -8{,}5$.

Méthode

- Puisqu'on recherche une tangente horizontale en un point, alors le nombre dérivé en ce point est nul.
- On détermine l'expression de $g'(x)$.
- On résout l'équation $g'(x) = 0$.
- La solution x_0 obtenue est l'abscisse où la tangente à la courbe représentative de g est horizontale.
- On calcule $g(x_0)$: l'équation réduite de la tangente horizontale est donnée par $y = g(x_0)$.



Méthode 1

À l'oral

4 Rappeler l'expression de la fonction dérivée de la fonction identité.
En déduire les expressions des dérivées des fonctions $x \mapsto 0{,}2x$ et $x \mapsto -\frac{x}{3}$.

5 Rappeler l'expression de la fonction dérivée de la fonction carré. En déduire l'expression de la fonction dérivée de $x \mapsto -x^2$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 1$. Parmi les expressions suivantes, laquelle est celle de la dérivée de f ?

1. $g(x) = 8x + 1$ **2.** $h(x) = 9$
3. $j(x) = 8x$ **4.** $k(x) = 8x^2$

7 Regrouper les fonctions suivantes par couple fonction/fonction dérivée.

$f(x) = x^2 - 2x$ $j(x) = 2x - 2$
$g(x) = x$ $k(x) = 0$
$h(x) = 0{,}5x^2$ $\ell(x) = -4$

8 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 12 - 1{,}5x^2 + 6x^3.$$

9 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^3 + 7x + 7.$$

10 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{4}{5}x^2 - x - 1.$$

11 Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 6}{3}.$$

12 Déterminer les expressions des fonctions dérivées de $f : x \mapsto 9 - x^2$ et $g : x \mapsto -x^2 + 1$.
Que remarque-t-on ?

13 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\ell : x \mapsto 4x^2 - 3x + 7$ et donner l'expression d'une autre fonction qui admet la même fonction dérivée.

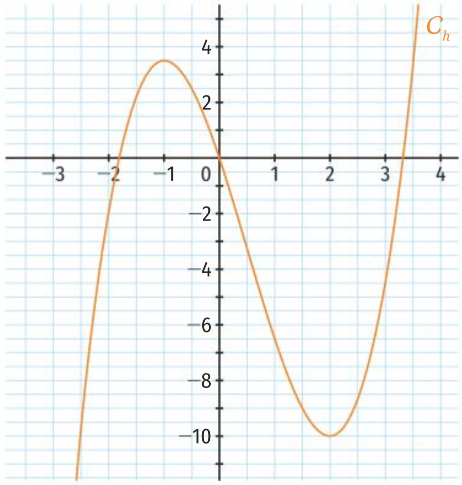
Méthode 2

À l'oral

14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$.
Justifier que la courbe représentative de cette fonction n'admet aucune tangente horizontale.

15 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2$.
Combien de tangentes horizontales la courbe représentative de cette fonction admet-elle ? Justifier.

16 La courbe ci-dessous représente une fonction h définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'équation réduite des deux tangentes horizontales à cette courbe.



17 Montrer que la courbe représentative de $f : x \mapsto x^3 - 1$ admet une unique tangente horizontale. En quelle abscisse ?

18 La fonction $h : x \mapsto x^3 - 300x + 2$ admet-elle des tangentes horizontales ? En quels points ?

19 Montrer que la courbe représentative de $g : x \mapsto 0{,}1x^2 - x + 2{,}5$ admet pour tangente horizontale la droite d'équation $y = 0$.

20 Montrer que la courbe représentative de $k : x \mapsto 5x^3 - 135x + 9$ admet deux tangentes horizontales, aux points d'abscisse $x_1 = -3$ et $x_2 = 3$.
Quelles sont les équations de ces tangentes ?

Méthode 3 Étudier les variations et les extremums d'une fonction sur un intervalle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 7x^2$.
Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ et préciser son extremum.

Solution

Pour tout réel x, $f'(x) = 4 \times 1 - 7 \times 2x = 4 - 14x$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 14x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$.
Puisque f' est une fonction affine de coefficient directeur négatif, on construit le tableau de signes de $f'(x)$ puis on en déduit les variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{2}{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}$	$\searrow$	

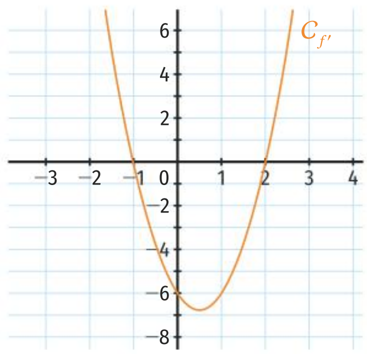
On en déduit que f admet un maximum atteint en $x = \frac{2}{7}$ et valant $f\left(\frac{2}{7}\right) = 4 \times \frac{2}{7} - 7 \times \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{7}$.

Méthode

On détermine les variations de f à partir du tableau de signes de sa dérivée. Les extremums se déduisent du tableau de variations.
Plus précisément :
- on détermine l'expression de $f'(x)$;
- on résout $f'(x) = 0$ et on en déduit le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle d'étude ;
- on détermine les variations de f sur l'intervalle d'étude en utilisant le signe de la dérivée.

Méthode 4 Étudier les variations d'une fonction à partir du graphe de sa dérivée

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe ci-contre représente la fonction dérivée de f notée f'.
Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Solution

Le signe de f' donne les variations de f.
On observe sur le graphique que f' est positive sur $]-\infty\,;-1]$, négative sur $[-1\,;2]$ et à nouveau positive sur $[2\,;+\infty[$.
On en déduit alors les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Donc f est croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$.

Méthode

On observe le signe de la dérivée et on applique le cours :
- si la dérivée f' est positive sur un intervalle J, alors la fonction f est croissante sur J ;
- si la dérivée f' est négative sur un intervalle J, alors la fonction f est décroissante sur J.

Méthode 3

À l'oral

21 Le tableau suivant est le tableau de signes de la fonction dérivée g' d'une fonction g.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction g admet-elle un extremum ? Justifier.

22 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}$.

23 En utilisant la fonction dérivée, déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$.

24 Recopier et compléter le tableau de variations de g d'après le signe de $g'(x)$.

On donne $g(-1) = 5$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g					

25 Recopier et compléter le tableau de variations de f d'après le signe de $f'(x)$.

On donne $f(-1) = -1$ et $f(0) = 0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f							

26 Construire le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0 ; 30]$ par :

$$f(x) = 27x^2 - 6x + 1.$$

27 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

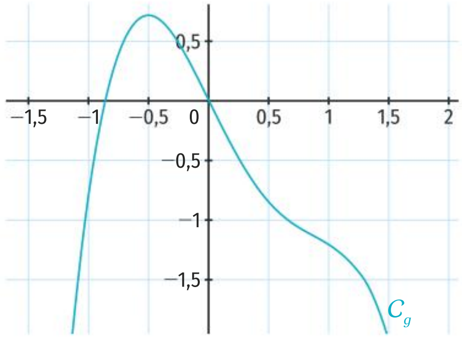
$$h(x) = x^3 + x + 1.$$

1. Déterminer l'expression de $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer le signe de $3x^2 + 1$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de h sur $\mathbb{R}$.

Méthode 4

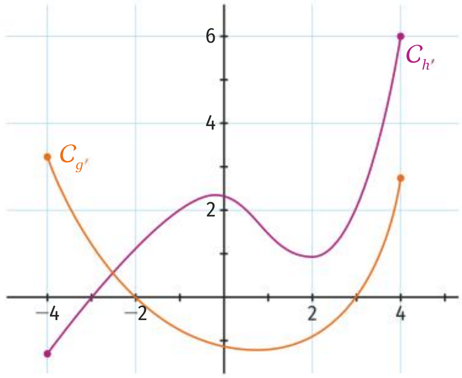
À l'oral

28 La courbe ci-dessous représente une fonction g. Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



1. g' s'annule deux fois sur $[-1 ; 1]$.
2. g' est positive sur $]-\infty ; -0{,}5]$ et négative sur $[-0{,}5 ; +\infty[$.

29 On considère deux fonctions h et g définies sur $[-4 ; 4]$ dont on donne les représentations graphiques de leur fonction dérivée h' et g'.



1. Déterminer graphiquement le signe de h' ainsi que celui de g' sur $[-4 ; 4]$.
2. En déduire les variations des fonctions h et g sur $[-4 ; 4]$.

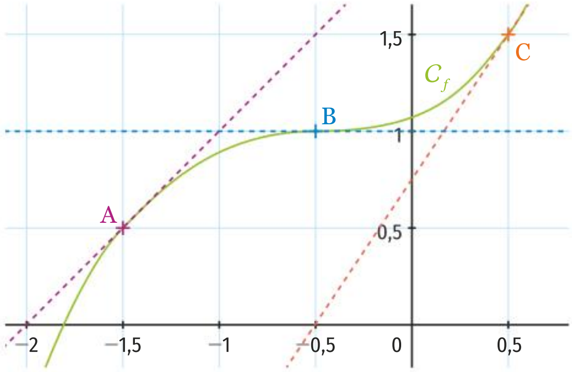
30 Soit f une fonction dont la dérivée admet le tableau de signes suivant. Tracer à main levée une représentation graphique possible de f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1 Fonction dérivée

31

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé les tangentes à cette courbe aux points A, B et C d'abscisses respectives $-1{,}5$, $-0{,}5$ et $0{,}5$.

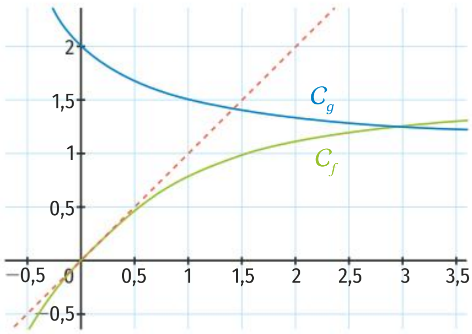


1. Déterminer graphiquement $f'(-1{,}5)$, $f'(-0{,}5)$ et $f'(0{,}5)$.

2. À l'aide des informations obtenues à la question **1**, tracer une représentation graphique approximative de la fonction f' sur $[-1{,}5\ ;\ 0{,}5]$.

32

On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. On a également tracé la tangente à C_f au point d'abscisse 0.



1. À l'aide du graphique, déterminer $f'(0)$.

2. La fonction g peut-elle correspondre à la représentation graphique de f' ? Justifier.

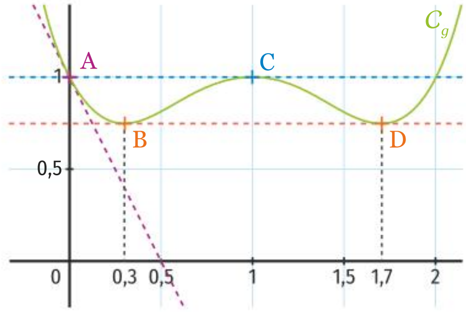
33 Exercice inversé

Proposer la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(0) = 2$
- $f'(0) = -1$
- $f(2) = -3$
- $f'(2) = 1$

34

La courbe ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé les tangentes à cette courbe aux points A, B, C et D d'abscisse respective 0 ; 0,3 ; 1 et 1,7.



1. Déterminer $g'(0)$, $g'(0{,}3)$, $g'(1)$ et $g'(1{,}7)$.

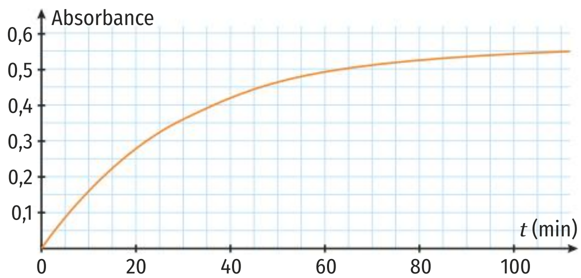
2. Tracer une représentation graphique approximative de la fonction g' sur $[0\ ;\ 2]$.

35 En chimie

En chimie, l'absorbance d'un milieu est une grandeur permettant de mesurer la réduction d'intensité de la lumière qui le traverse. Plus elle est grande, plus le rayon lumineux est atténué par son passage dans la solution.

Le suivi spectrophotométrique d'une réaction chimique a permis de tracer la courbe d'évolution de l'absorbance A en fonction du temps t.

La vitesse de la réaction est définie par $v(t) = A'(t)$.



1. Que vaut l'absorbance à $t = 0$? À $t = 60$?

2. Décrire l'évolution de la vitesse de la réaction au cours du temps. À quel moment est-elle maximale ?

2 Dérivées des fonctions de référence

36

Déterminer sur $\mathbb{R}$ l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto x^2 + 3x - 2$
2. $g : x \mapsto 5x^3 - 4x^2 + 8$
3. $h : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$
4. $j : x \mapsto -2x^3 - 5x + 8x^2 + 1$

37

Déterminer sur $\mathbb{R}$ l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto 0{,}3x^2 + 4x - 6$
2. $g : x \mapsto 2 - 9x^2$
3. $h : x \mapsto 5x^3 + 18x - 15$
4. $j : x \mapsto \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$

38

Déterminer sur $\mathbb{R}$ l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x - 7}{4}$
2. $g : x \mapsto 1 - x^2 - x^3$
3. $h : x \mapsto x(x^2 + 1{,}2x + 8)$
4. $j : x \mapsto (x - 3)^2$

39 Copie d'élève

Pour déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = 6 - 10{,}2x^2$, Ahmed écrit le raisonnement suivant.

> *Je remplace x^2 par $2x$, j'obtiens*
> $f'(x) = 6 - 10{,}2 \times 2x = 6 - 20{,}4x$.

Corriger son erreur et écrire un raisonnement correct.

40

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}5x - 3.$$

Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente horizontale et donner son équation réduite.

41

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = 12x^3 - 30x^2 + 25x - 10.$$

1. a. Déterminer l'expression de g', la fonction dérivée de g.

b. Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = (6x - 5)^2$.

2. Justifier que la courbe représentative de g admet une seule tangente horizontale et donner son équation réduite.

42 En physique

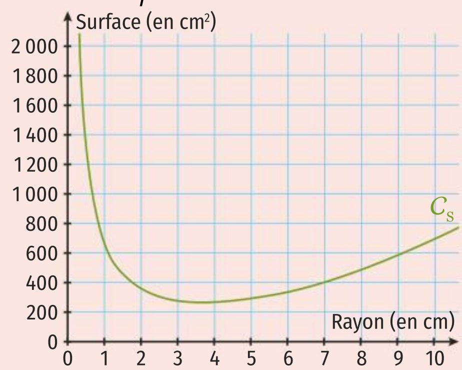
Roger frappe une balle de tennis depuis une hauteur de 2 m pour lui donner une vitesse initiale de 68,6 m/s.
On modélise l'altitude de la balle à l'instant $t \geqslant 0$ par la fonction z définie par $z(t) = -4{,}9t^2 + 6{,}86t + 2$.

1. La vitesse de la balle peut être décomposée en deux composantes : une composante horizontale et une composante verticale. Montrer que la vitesse verticale de la balle est nulle au bout de 0,7 s.

2. Quelle altitude a-t-elle atteinte à ce moment-là ?

43 Fil rouge

Une canette cylindrique de volume 33 cL admet une surface totale S (surface latérale ainsi que le haut et le bas) exprimée en cm² en fonction de son rayon r donné en cm. On admet que la courbe ci-dessous est celle de S en fonction de r et que la dérivée de cette fonction est définie par $S'(r) = \dfrac{4\pi r^3 - 660}{r^2}$, pour tout rayon $r > 0$.



1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4\pi r^3 - 660 = 0$.

2. À quoi correspond ce résultat sur le graphique ?

44 En économie

Une entreprise estime que le coût de sa production, en euro, est donné en fonction du nombre x d'unités produites par $C(x) = -0{,}008x^2 + 1{,}2x + 50$.

Le coût marginal $C_m(x)$ représente le coût de production d'une unité supplémentaire quand on en a déjà produit x. Il est défini par :

$$C_m(x) = C(x+1) - C(x).$$

1. a. Calculer et interpréter $C(10)$.

b. Calculer et interpréter $C(9)$.

c. Calculer et interpréter $C_m(9)$.

2. Calculer et interpréter $C_m(20)$.

3. On admet que, lorsque x est suffisamment grand, $C_m(x)$ peut être approché par $C'(x)$.

a. Déterminer l'expression de $C'(x)$.

b. Calculer $C'(9)$ et $C'(20)$.
Retrouve-t-on approximativement les résultats des questions **1. c.** et **2** ?

3 Étude des variations d'une fonction

45

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 3(x-2)^2.$$

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 3x^2 - 12x + 12$.

2. En déduire une expression de $f'(x)$ puis déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

46

Construire les tableaux de variations des fonctions f et g définies sur $[-10 ; 10]$ par $f(x) = x^2 - 7x + 9$ et $g(x) = -x^3 + 48x - 100$.

47

Construire les tableaux de variations des fonctions f et g définies pour tout $x \in [-2 ; 2]$ par $f(x) = 0{,}4x^2 - 0{,}25x - 1$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$.
Préciser les extremums de f et de g sur $[-2 ; 2]$.

48 Exercice inversé

Construire la courbe représentative d'une fonction f dont la dérivée admet le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

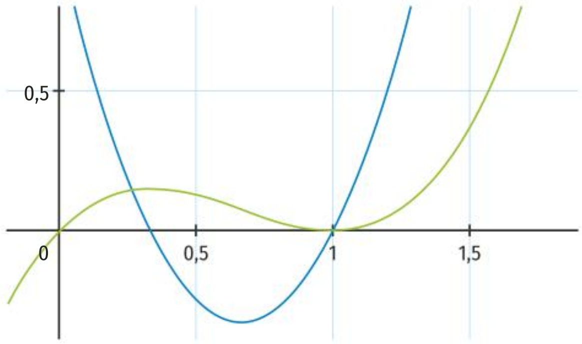
49 Exercice inversé

Construire la courbe représentative d'une fonction f dont la dérivée admet le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

50

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté une fonction et sa fonction dérivée.



Retrouver, parmi ces deux courbes, laquelle représente la fonction dérivée. Justifier.

51 En économie

Une usine de fabrication de voitures estime que le coût de production, en millier d'euros, de x voitures en une semaine est donnée par la fonction C définie par $C(x) = 0{,}1x^3 - 2{,}52x^2 + 26x + 2$.

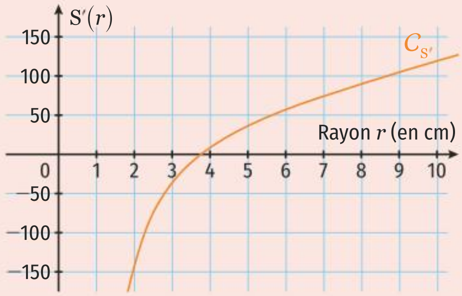
Le coût marginal $C_m(x)$ représente le coût de production d'une unité supplémentaire quand on en a déjà produit x. On admet que $C_m(x)$ peut être approché par $C'(x)$.

1. Déterminer l'expression de $C_m(x)$.

2. En utilisant la dérivée de $C_m(x)$, déterminer la quantité pour laquelle le coût marginal est minimal.

52 Fil rouge

Soit S la fonction qui donne la surface, exprimée en cm², d'une canette cylindrique de 33 cL en fonction de son rayon r exprimé en cm.
On a représenté ci-dessous la fonction S′.



Par lecture graphique, déterminer une valeur approchée du rayon pour lequel S est minimale.

53

Suite à une épidémie dans une région, le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est modélisé par $f(t) = 45t^2 - t^3 + 100$, pour tout t appartenant à $[0\,;45]$.

1. Déterminer le nombre de personnes malades prévu par ce modèle au bout de 10 jours.

2. Montrer que, pour tout t appartenant à $[0\,;45]$:

$$f'(t) = 3t(30 - t).$$

3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;45]$ et en déduire les variations de f.

4. Déterminer le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 45 jours et préciser le nombre de personnes alors malades.

54 Environnement

Lors du transport de l'énergie électrique entre le lieu de production et le lieu de consommation, une partie de cette énergie est dissipée sous forme de chaleur : c'est l'effet Joule. Ces pertes s'élèvent en France à 2,5 % de la production annuelle et sont atténuées en utilisant des lignes à haute tension qui permettent de réduire l'intensité.
Dans cet exercice, on étudie un réseau électrique simplifié où la puissance totale dissipée est donnée, en mégawatt (MW), par $P(x) = 2{,}4x^2 - x + 0{,}6$ avec x l'intensité en sortie d'une source, exprimée en kiloampère (kA).

1. Déterminer l'expression de $P'(x)$ en fonction de x.

2. En déduire le tableau de signes de P', puis les variations de P sur l'intervalle $[0\,;1]$.

3. Pour quelle intensité la puissance dissipée par effet Joule est-elle minimale ? Que vaut alors cette puissance minimale ?

4. L'énergie dissipée est calculée en multipliant la puissance dissipée, en watt, par le temps, en heure. Calculer l'énergie minimale dissipée en une journée.

Pour en apprendre plus, consulter LLS.fr/EM1Joule.

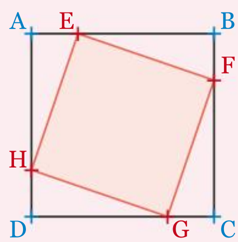
Défis !

55 On dispose d'un grillage de 16 m de long et on veut former un enclos rectangulaire dont l'un des quatre côtés est un mur. Les trois autres côtés sont formés par le grillage. Déterminer les dimensions de cet enclos de sorte que l'aire soit maximale.

56 Donner une fonction polynomiale de degré 3 ayant le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de k		↗	2	↗	

57 Soit ABCD un carré et E, F, G et H quatre points appartenant respectivement au segment $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que $AE = BF = CG = DH$.



Où placer le point E pour que l'aire du carré EFGH soit minimale ?

58 Montrer que la courbe représentative de $f : x \mapsto x^3 + x$ n'admet pas de tangente horizontale.

Remarque Cette double-page permet d'approfondir les notions de ce chapitre et de travailler de façon différenciée avec les élèves de la classe, notamment avec les plus à l'aise en mathématiques ou bien avec celles et ceux qui souhaiteraient choisir l'option mathématiques complémentaires en terminale.

Cours

Complément sur la dérivation

Propriété

La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est définie, pour tout $x \neq 0$, par $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$.

Exemple

Pour déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\frac{4x^2-7}{x}$, on écrit, pour $x>0$, $g(x)=\frac{4x^2}{x}-7\times\frac{1}{x}=4x-7\times\frac{1}{x}$. Ainsi, pour tout $x>0$, $g'(x)=4-7\times\frac{-1}{x^2}=4+\frac{7}{x^2}$.

Propriété

Dérivée d'un produit de fonctions

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors $u\times v$ est dérivable sur I et :

$$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'.$$

59 Déterminer les expressions des fonctions dérivées des fonctions suivantes définies pour $x>0$.

1. $f(x)=2x^2-9x+\frac{1}{x}$ **2.** $g(x)=x^3-10+\frac{3}{x}$

3. $h(x)=\frac{8x^2+5x-1}{x}$ **4.** $k(x)=\frac{-5x^3+3x^2+4}{x}$

60 Déterminer les expressions des fonctions dérivées des fonctions f, g, h et k suivantes définies pour tout réel x différent de 0.

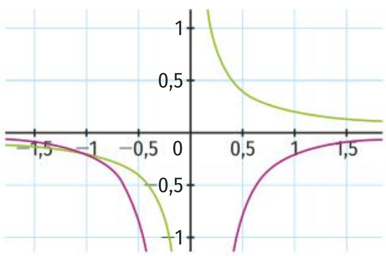
1. $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}$ **2.** $g(x)=\frac{4x^3-0{,}8x^2-x+9}{x}$

3. $h(x)=\frac{1}{2x}$ **4.** $k(x)=\frac{-1}{3x}$

61 En utilisant sa fonction dérivée, démontrer que la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

62 Construire le tableau de variations de la fonction f définie sur $]-2\,;0[$ par $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$.

63 Sur le graphique ci-dessous, identifier les courbes représentatives de $f: x\mapsto\frac{1}{5x}$ et de sa fonction dérivée. Justifier.



64 La consommation en litre pour 100 km d'un véhicule est donnée, en fonction de sa vitesse x, en km/h, pour $20\leqslant x\leqslant 100$ par :

$$f(x)=\frac{0{,}5x^2-36x+800}{x}.$$

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $x\in[20\,;100]$.

2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur son ensemble de définition, puis les variations de f sur $[20\,;100]$.

3. Pour quelle vitesse du véhicule la consommation est-elle minimale ? Calculer cette consommation.

65 La vitesse d'une onde sonore en eau profonde est modélisée, en fonction de sa longueur d'onde x comprise entre 0,5 m et 50 m, par :

$$v(x) = 1000\sqrt{x+\frac{1}{x}}.$$

Afin de déterminer pour quelle longueur d'onde cette vitesse est minimale, on cherche le minimum sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 50]$ de la fonction $f = v^2$, définie par $f(x) = 1\,000\,000 \times \left(x + \frac{1}{x}\right)$.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

2. Dresser le tableau de signes de f', puis le tableau de variations de f sur $[0,5\ ;\ 50]$.

3. En déduire la vitesse minimale d'une onde sonore dans l'eau.

66 Une agricultrice produit du lait. Elle estime que le coût de production en euro est donné, en fonction du volume produit en mètre cube, par :

$$C(x) = 3x^3 - 2{,}5x^2 + 300x + 200.$$

On définit le coût moyen pour tout $x > 0$ par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Donner l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x, puis celle de sa dérivée.

2. À l'aide d'une table de valeurs de $C'_M(x)$, créée à l'aide d'un tableur par exemple, construire le tableau de signes de $C'_M(x)$, le tableau de variations de C_M et déterminer le volume de lait, arrondi au mètre cube, pour lequel le coût moyen est minimal.

3. Donner ce coût moyen minimal.

67 Un producteur de safran estime que le coût de production de x kg de safran est donné, en euro, par $C(x) = x^3 - 18x^2 + 124x + 200$.

Le coût moyen par kg de safran, exprimé en euro, sur une production de x kg est défini pour tout $x > 0$ par $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1. Donner l'expression du coût moyen en fonction de x.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$C'_M(x) = \frac{2(x-10)(x^2+x+10)}{x^2}.$$

Aide

On pourra commencer par montrer que, pour tout $x > 0$, $C'_M(x) = \frac{2x^3 - 18x^2 - 200}{x^2}$.

3. En déduire le tableau de signes de $C'_M(x)$, puis le coût moyen minimal. Pour quelle masse produite est-il atteint ?

68 Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par $f(x) = (x^2 + 4x - 5)(7x + 2)$.

1. Développer $f(x)$ et en déduire $f'(x)$ pour tout réel x.

2. Retrouver ce résultat en utilisant la propriété de dérivation d'un produit de fonctions.

69 Soit g la fonction définie, pour tout réel x, par $g(x) = (-2x^3 - 3x + 1)(7x + 2)$.

1. Développer $g(x)$. Peut-on en déduire $g'(x)$?

2. Déterminer, pour tout réel x, une expression de $g'(x)$ en utilisant la propriété de dérivation d'un produit de fonctions.

70 L'objectif de cet exercice est de conjecturer une expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

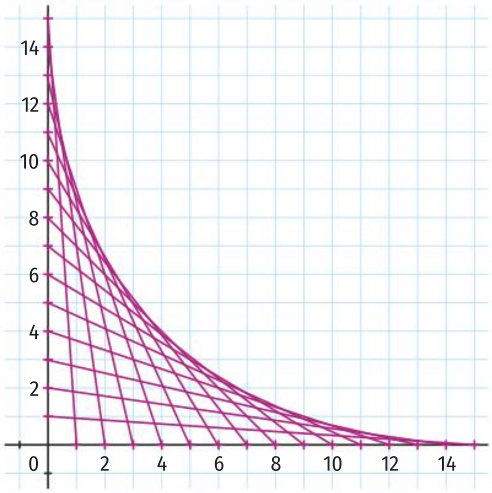
1. Rappeler les expressions des dérivées des fonctions cube, carré et identité.

2. a. On cherche ici à déterminer la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = x^4$. Écrire g comme un produit de fonctions de référence, puis déterminer une expression de g'.

b. On cherche ici à déterminer la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = x^5$. Écrire h comme un produit de fonctions de référence, puis déterminer une expression de h'.

c. Conjecturer une expression de la dérivée de la fonction f.

Les tableaux de fils



Doc. 1 La technique des tableaux de fils

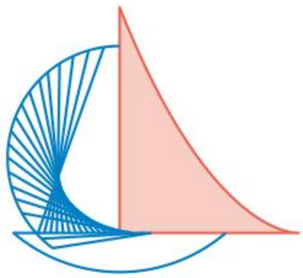
La technique des tableaux de fils consiste à tracer des courbes en tendant des fils entre deux axes pour former son enveloppe, qui est constituée des tangentes à la courbe.

On place des clous sur chacun des axes et on les relie entre eux dans l'ordre.

Par exemple, dans la figure ci-contre, le point $(0\ ;\ 1)$ est relié au point $(15\ ;\ 0)$, le point $(0\ ;\ 2)$ est relié au point $(14\ ;\ 0)$, etc.

On voit apparaître une portion de courbe.

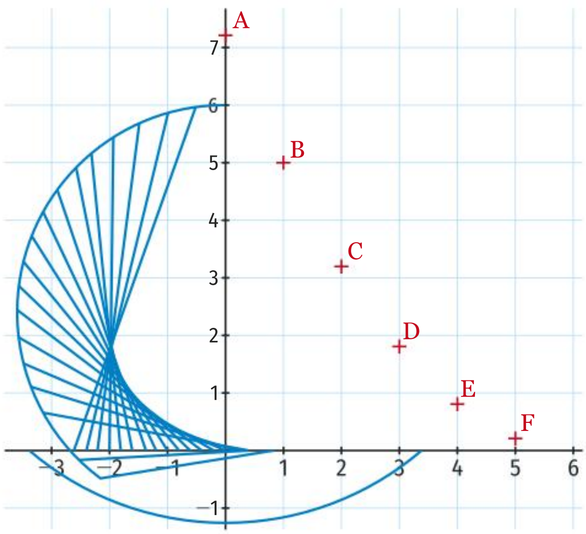
Questions



On souhaite compléter un tableau de fils à partir du dessin ci-contre en dessinant la voile rouge en fils tendus. La courbe formée par la voile est définie par la fonction polynomiale de degré 2 définie sur $[0\ ;\ 6]$ par $g(x) = 0{,}2x^2 - 2{,}4x + 7{,}2$. Pour tracer les tangentes passant par les points A, B, C, D, E et F (voir illustration ci-dessous) on cherche à quels points de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées il faut les relier.

Pour organiser les recherches, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.
Il est possible d'ajouter des points pour une meilleure précision.

Tangente	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Point de contact	$A(0\ ;\ 7{,}2)$	$B(1\ ;\ \ldots)$	$C(2\ ;\ \ldots)$	$D(3\ ;\ \ldots)$	$E(4\ ;\ \ldots)$	$F(5\ ;\ \ldots)$
Coefficient directeur						
Ordonnée à l'origine						
Intersection avec l'axe (Ox)						



Dessiner la voile sur le support à télécharger LLS.fr/EM1Fils.

Aide

- Les lignes « Point de contact » et « Coefficient directeur » se remplissent à l'aide des tables de valeurs de g et g'.
- L'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire l'ordonnée du point tel que $x = 0$) de la droite passant par le point $(x_0\ ;\ y_0)$ et de coefficient directeur m est donnée par $p = y_0 - m \times x_0$.
- L'abscisse du point d'intersection avec l'axe (Ox) est la solution de l'équation $y = 0$.

Remarque Cette technique est utilisée en architecture, comme pour le centre culturel de Bakou (Azerbaïdjan) conçu par Zaha Hadid en 2007.

Fil rouge du chapitre

1 Les dimensions d'une canette de soda

Sujet : Pour minimiser les coûts de production liés aux emballages, les entreprises cherchent à réduire au minimum la quantité d'aluminium utilisée pour construire une canette de soda de volume fixé (généralement 33 cL).

Comment les dimensions d'une canette de soda sont-elles choisies ?

Pistes de recherche :

- Comment calculer le volume et la surface d'une canette ? Quelles approximations peut-on faire ?
- À volume constant, pour quel rayon la surface d'une canette est-elle minimale ?
- Quel est l'intérêt de chercher une surface minimale ? Quels pourraient être les autres critères recherchés ?
- Dans les rayons, on trouve aussi des canettes plus allongées. Comment peut-on l'expliquer ?

Fil rouge :

- Ex. 43 p. 133
- Ex. 52 p. 135

DES CONSEILS POUR LA PRÉPARATION

- Répéter plusieurs fois son exposé chez soi.
- Anticiper les questions qu'on pourra nous poser.
- Expliquer les choses très simplement.

2 Chute libre

Sujet : Lorsqu'on lâche un objet d'une certaine hauteur en négligeant les forces de frottement, la mécanique, une branche de la physique, nous donne une modélisation simple de son mouvement. On peut alors facilement déterminer sa vitesse et son accélération à tous les instants de sa chute.

Comment prédire la durée de la chute libre d'un objet ?

Pistes de recherche :

- Quelle est la force qui agit sur un objet en chute libre ?
- Qu'est-ce que la deuxième loi de Newton ?
- Que dire de l'accélération d'un objet en chute libre ?
- Quel est le lien entre l'accélération, la vitesse et l'altitude d'un objet en chute libre ?
- Calculer des valeurs pour plusieurs exemples. Sont-elles toujours réalistes ?

DES CONSEILS POUR L'ORAL

- Être souriant(e) et paraître détendu(e).
- Avoir une tenue vestimentaire adaptée.
- Rester courtois(e) vis-à-vis de son auditoire.

Automatismes

4 **1.** La fonction f est croissante sur $[0\,;4]$, puis décroissante sur $[4\,;11]$.

2. La balle atteint une hauteur maximale d'environ 2,5 m. Cette hauteur maximale est atteinte à 4 m du joueur.

3. La balle est à plus de 2 m de hauteur sur $[1\,;7]$ donc sur une distance de $7-1=6$ m.

12 **1.** Au bout d'une minute (c'est-à-dire 60 secondes) le hand-spinner tourne à la vitesse de 7 tours par seconde.

2. Le hand-spinner atteint une vitesse de $\frac{20}{2}=10$ tours par seconde au bout d'environ 48 secondes.

3. Lors des 20 premières secondes, le hand-spinner effectue entre 15,5 et 20 tours par seconde donc effectue entre $15{,}5\times 20=310$ et $20\times 20=400$ tours au total.

25 **1.** $7-\frac{2}{13}=\frac{7\times 13}{13}-\frac{2}{13}=\frac{91-2}{13}=\frac{89}{13}$

2. $\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}+\frac{2\times 4}{4}=\frac{1+8}{4}=\frac{9}{4}$

3. $\frac{5}{9}-4=\frac{5}{9}-\frac{4\times 9}{9}=\frac{5-36}{9}=-\frac{31}{9}$

4. $4{,}5+\frac{5}{3}=\frac{9}{2}+\frac{5}{3}=\frac{27+10}{6}=\frac{37}{6}$

42 **1.** $\frac{135}{25}=\frac{27\times 5}{5\times 5}=\frac{27}{5}$

2. $\frac{462}{78}=\frac{231\times 2}{39\times 2}=\frac{231}{39}=\frac{77\times 3}{13\times 3}=\frac{77}{13}$

3. $\frac{-150}{210}=\frac{-15}{21}=-\frac{5}{7}$

4. $3{,}75=\frac{375}{100}=\frac{5\times 75}{5\times 20}=\frac{75}{20}=\frac{15}{4}$

61 Un morceau de sucre pèse environ 8 g. Dans une boîte de 800 g se trouvent donc environ $\frac{800}{8}=100$ morceaux de sucre.

66 **1.** Le poids d'une personne pesant 77 kg est de $77\times 9{,}8=754{,}6$ N.

2. Une personne dont le poids vaut 637 N a une masse de $\frac{637}{9{,}8}=65$ kg.

80 Soit x le prix d'une boîte de céréales.

Le prix de trois boîtes de céréales vaut $3x$. Le prix de cinq boîtes de céréales avec une réduction de 20 % vaut $5x\times 0{,}8=4x$.

On cherche donc à résoudre l'équation $4x=3x+3{,}2$ qui donne $x=3{,}2$.

Ainsi, une boîte de céréales sans réduction coûte 3,20 €.

92 **1.** Les solutions de $x^2=144$ sont $x=12$ et $x=-12$.

2. $x^2-64=0$ se réécrit $x^2=64$ qui a pour solutions $x=8$ et $x=-8$.

3. $2x^2-18=0$ se réécrit $2x^2=18$ puis $x^2=9$ qui a pour solutions $x=3$ et $x=-3$.

4. $75-3x^2=0$ se réécrit $3x^2=75$ soit encore $x^2=25$ qui a pour solutions $x=5$ et $x=-5$.

119 Le jardin de l'artisan a une aire valant $10\times 10=100$ m².

Après une augmentation de 21 %, l'aire de ce jardin est égale à $1{,}21\times 100=121$ m². Soit x la nouvelle longueur du côté du jardin.

On a alors $x^2=121$ et donc $x=11$ ou $x=-11$.

La longueur du côté du jardin étant forcément positive, la nouvelle longueur du côté du jardin doit donc être de 11 m.

128 Soit x la valeur initiale de cette quantité.

Si cette quantité augmente de 20 %, elle devient égale à $1{,}2\times x$.

Si maintenant elle diminue de 20 %, elle devient égale à $(1-0{,}2)\times 1{,}2\times x=0{,}8\times 1{,}2x=0{,}96x$ ce qui correspond à une diminution de 4 % par rapport à la quantité initiale.

Chapitre 1

Entraînement

19 **1.** La zone géographique ayant émis le plus de GES en 2019 est l'Asie de l'Est. Celle ayant émis le moins de GES en 2019 est l'ensemble Australie, Japon, Nouvelle-Zélande.

2. **a.** L'Asie de l'Est regroupe 19,3 % de la population mondiale. L'Asie du Sud regroupe 24,1 % de la population mondiale.

b. Le pourcentage d'émission de GES est plus grand pour l'Asie de l'Est que pour l'Asie du Sud alors que l'Asie du Sud représente une plus grande population que l'Asie de l'Est.

3. En 2019, l'Afrique a émis $\frac{9}{100}\times 59=5{,}31$ Gt de GES. De la même manière, on obtient une émission de 5,9 Gt pour l'Amérique latine et Caraïbes, 7,08 Gt pour l'Amérique du Nord, 15,93 Gt pour l'Asie de l'Est, 47,2 Gt pour l'Asie du Sud, 53,1 Gt pour l'Asie du Sud-Est et Pacifique, 17,7 Gt pour l'Australie, Japon et Nouvelle-Zélande, 47,2 Gt pour l'Europe, 35,4 Gt pour l'Europe de l'Est, Asie centrale et de l'Ouest et enfin 29,5 Gt pour le Proche-Orient.

4. En 2019, la quantité de GES émis par habitant en Afrique était de $\frac{5{,}31\times 10^9}{1292\times 10^6}\approx 4{,}1$ tonnes. De la même manière, on obtient une émission de 9,13 t pour l'Amérique latine et Caraïbes, 19,4 t pour l'Amérique du Nord, 10,8 t pour l'Asie de l'Est, 40,4 t pour l'Asie du Sud, 78,8 t pour l'Asie du Sud-Est et Pacifique, 112,7 t pour l'Australie, Japon et Nouvelle-Zélande, 76,1 t pour l'Europe, 121,6 t pour l'Europe de l'Est, Asie centrale et de l'Ouest et enfin 117,1 t pour le Proche-Orient. La zone émettant le plus de GES par habitant est donc l'Australie, Japon et Nouvelle-Zélande et celle en émettant le moins est l'Afrique.

24 **1.** On résume la présence d'azote à l'aide du tableau ci-dessous.

	Océan Arctique	Océan Atlantique	Océan Indien	Mer Méditerranée et mer Noire	Océan Pacifique
1970	1,2 t	13,9 t	4 t	2 t	7 t
2000	1 t	14,1 t	5 t	2 t	10,8 t

2. D'après le graphique, on peut s'attendre à une augmentation en azote dans les différents océans et mers de la planète.

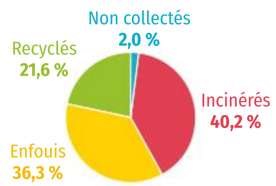
29 **1.** Si 98 % des déchets plastiques sont collectés, cela signifie que $100-98=2$ % ne le sont pas. Ce qui correspond à $\frac{2}{100}\times 4{,}5=0{,}09$ Mt soit 90 000 tonnes de déchets.

2. 41 % des 98 % de déchets plastiques collectés sont incinérés, ils correspondent donc à une masse de $\frac{41}{100}\times\frac{98}{100}\times 4{,}5=1{,}8081$ Mt soit 1 808 100 tonnes de déchets.

De la même manière, les déchets plastiques enfouis correspondent à une masse de $\frac{37}{100}\times\frac{98}{100}\times 4{,}5=1{,}6317$ Mt soit 1 631 700 tonnes, et les déchets plastiques recyclés correspondent à $\frac{22}{100}\times\frac{98}{100}\times 4{,}5=0{,}9702$ Mt soit 970 200 tonnes de déchets.

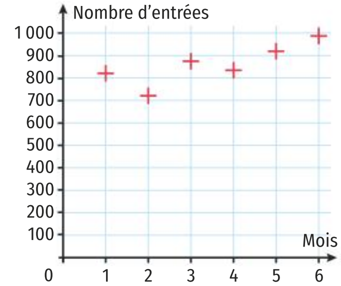
3. En moyenne, en 2016, une personne produisait $\frac{4\,500\,000\,000}{67\,000\,000}\approx 67{,}16$ kg de déchets plastiques par an.

4. On utilise les résultats des questions **1.** et **2.**



Pour aller plus loin

42 **1.**

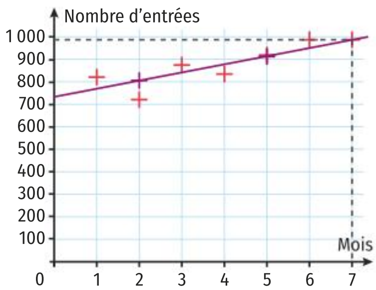


2. On sépare la série en deux séries de trois points.

Le point moyen du premier groupe a pour abscisse $\frac{1+2+3}{3}=2$ et pour ordonnée $\frac{820+720+875}{3}=805$.

Le point moyen du second groupe a pour abscisse $\frac{4+5+6}{3}=5$ et pour ordonnée $\frac{834+919+986}{3}=913$.

3. Par lecture graphique, on peut estimer le nombre d'entrées le septième mois à 985 entrées.



44 **1. a.** On sépare la série en deux séries de quatre points.

Le point moyen du premier groupe a pour abscisse $\frac{1+2+3+4}{4}=2{,}5$ et pour ordonnée $\frac{1{,}566+1{,}344+1{,}421+1{,}426}{4}=1{,}43925$.

Le point moyen du second groupe a pour abscisse $\frac{5+6+7+8}{4}=6{,}5$ et pour ordonnée $\frac{1{,}563+1{,}606+1{,}658+1{,}724}{4}=1{,}63775$.

Le coefficient directeur de la droite de Mayer est égal à $\frac{1{,}63775-1{,}43925}{6{,}5-2{,}5}=0{,}049625$.

Soit maintenant p l'ordonnée à l'origine de cette droite.

Puisque le point $(2{,}5\ ;\ 1{,}43925)$ appartient à cette droite de Mayer, on a $0{,}049625\times 2{,}5+p=1{,}43925$ d'où $p=1{,}3151875$.

L'équation réduite de la droite de Mayer associée à cette série statistique est donc $y=0{,}049625x+1{,}3151875$.

b. Mars 2022 correspond à l'abscisse 11 et donc à un prix de $0{,}049625\times 11+1{,}3151875\approx 1{,}861$ €.

De même, juin 2022 correspond à l'abscisse 14 et donc à un prix de $0{,}049625\times 14+1{,}3151875\approx 2{,}010$ €.

2. Par rapport à la prévision, le taux d'évolution du prix vaut $\frac{1{,}913}{1{,}861}\approx 1{,}028$ en mars 2022, soit 2,8 %, et $\frac{2{,}133}{2{,}010}\approx 1{,}061$ en juin 2022, soit 6,1 %.

Chapitre 2

Entraînement

24 **1.** Le nombre total de personnes au chômage est de $268+306+621+634+252+285=2\,366$ milliers, parmi lesquels $268+306=574$ milliers ont moins de 25 ans, ce qui correspond à une fréquence marginale égale à $\frac{574}{2\,366}=\frac{41}{169}$.

2. D'après le tableau, 268 milliers de femmes de moins de 25 ans sont au chômage.
Au total, $268+621+252=1141$ milliers de femmes le sont.
La fréquence conditionnelle des personnes au chômage de moins de 25 ans parmi les femmes au chômage est donc égale à $\frac{268}{1141}$.

3. D'après le tableau, il y avait 268 milliers de femmes de moins de 25 ans au chômage en 2021, et $268+306=574$ milliers de personnes au chômage de moins de 25 ans.
La fréquence conditionnelle de femmes parmi les personnes au chômage de moins de 25 ans est donc égale à $\frac{268}{574}=\frac{134}{287}$.

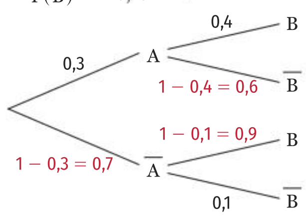
31 $P(A)=0{,}35$, $P(\overline{A})=0{,}65$, $P_A(B)=0{,}04$, $P_A(\overline{B})=0{,}96$, $P_{\overline{A}}(B)=0{,}72$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})=0{,}28$.

38 Notons A l'événement « Le client a acheté des sucreries. » et B l'événement « Le client a acheté une boisson ». On a $P(A)=0{,}32$, $P(B)=0{,}27$ et $P(A\cap B)=0{,}05$. On en déduit que $P_A(B)=\frac{0{,}05}{0{,}32}=0{,}15625\neq P(B)$. Donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Pour aller plus loin

45 Pour calculer $P(B)$, on utilise la formule des probabilités totales : $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=0{,}3\times 0{,}4+0{,}7\times 0{,}9=0{,}75$.

Pour calculer $P_B(A)$, on commence par déterminer $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0{,}3\times 0{,}4=0{,}12$, puis on utilise la formule $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}12}{0{,}75}=0{,}16$.



46 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ donc $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}2+0{,}7-0{,}76=0{,}14$.
D'autre part, $P(A)\times P(B)=0{,}7\times 0{,}2=0{,}14$.
Comme $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, les événements A et B sont indépendants.

Chapitre 3

Entraînement

40 On a $u(2)=u(1)+0{,}1=0{,}2+0{,}1=0{,}3$, $u(3)=u(2)+0{,}1=0{,}3+0{,}1=0{,}4$, $u(4)=u(3)+0{,}1=0{,}4+0{,}1=0{,}5$.

u étant une suite arithmétique de raison $0{,}1>0$, elle est strictement croissante.

45 Par lecture graphique, on a $u(1) = 0$ et $u(5) = -1$. Pour passer de $u(1)$ à $u(5)$, on ajoute 4 fois la raison r de cette suite donc $u(1) + 4 \times r = u(5)$ donc $4r = -1$ soit $r = -0{,}25$.

On en déduit que u est la suite arithmétique de premier terme $u(0) = u(1) - r = 0{,}25$ et de raison $r = -0{,}25$. On peut donc écrire, pour tout n entier naturel, $u(n) = -0{,}25 \times n + 0{,}25$.

51 Une fonction est affine si son expression algébrique peut s'écrire sous la forme $mx + p$ avec m et p des réels.

1. f n'est pas linéaire.

2. Pour tout réel x, $g(x) = 5x \times 7 - 5x \times 5x = -25x^2 + 35x$ donc g n'est pas linéaire.

3. Pour tout réel x, $h(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ donc h est linéaire, de coefficient directeur égal à $\frac{3}{4} > 0$ donc h est croissante.

4. Pour tout réel x, $i(x) = (x+2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$ donc i est linéaire, de coefficient directeur $4 > 0$ donc i est croissante.

55 1. Le coefficient directeur de f est donné par :

$$\frac{f(100) - f(37)}{100 - 37} = \frac{212 - 98{,}6}{100 - 37} = 1{,}8.$$

Soit désormais p l'ordonnée à l'origine de f.

On sait, d'une part, que l'expression de f s'écrit $f(x) = 1{,}8x + p$, d'autre part que $f(100) = 212$. Donc $1{,}8 \times 100 + p = 212$ et donc $p = 212 - 1{,}8 \times 100 = 32$.

On en déduit que, pour tout x, $f(x) = 1{,}8x + 32$.

2. **a.** Soit C la température en °C correspondante.
On a $107{,}6 = 1{,}8\mathrm{C} + 32$ donc $\mathrm{C} = \frac{107{,}6 - 32}{1{,}8} = 42$ °C.

b. En notant C la température en °C et F celle en degré Fahrenheit correspondante, on a $\mathrm{F} = 1{,}8\mathrm{C} + 32$ donc $1{,}8\mathrm{C} = \mathrm{F} - 32$ et donc $\mathrm{C} = \frac{1}{1{,}8}\mathrm{F} - \frac{32}{1{,}8} = \frac{10}{18}\mathrm{F} - \frac{320}{180} = \frac{5}{9}\mathrm{F} - \frac{160}{9}$.
On reconnaît bien l'expression d'une fonction affine, de coefficient directeur $\frac{5}{9}$ et d'ordonnée à l'origine $-\frac{160}{9}$.

Pour aller plus loin

66 Soit r la raison de cette suite. On a $u_{12} = 10 \times r + u_2$ d'où $-1 = 10r + 3$ soit $10r = -4$ et donc $r = -0{,}4$.

De plus, $u_2 = 2 \times r + u_0$ donc $u_0 = u_2 - 2 \times r = 3 - 2 \times (-0{,}4) = 3{,}8$.

73 1. La raison de la suite (v_n) est égale à $v_9 - v_8 = 144 - 130 = 14$.

2. $v_8 = 8 \times 14 + v_0$ donc $v_0 = 130 - 8 \times 14 = 18$.

3. Première méthode : $v_{17} = 242 + 14 = 256$, $v_{18} = 256 + 14 = 270$, $v_{19} = 270 + 14 = 284$, $v_{20} = 284 + 14 = 298$.
Seconde méthode : $v_{20} = 4 \times 14 + 242 = 298$.

Chapitre 4

Entraînement

29 1. $u(1) = 4 \times u(0) = 4 \times 3 = 12$, $u(2) = 4 \times u(1) = 4 \times 12 = 48$, $u(3) = 4 \times u(2) = 4 \times 48 = 192$.

2. $u(7) = 4 \times u(6)$ et $u(6) = 4 \times u(5)$.

3. On en déduit $u(7) = 4 \times u(6) = 4 \times 4 \times u(5) = 16 \times u(5)$.

33 1. D'après la loi de Moore, le nombre de transistors double tous les deux ans. Ce nombre peut donc être modélisé par une suite géométrique u de raison 2 et de premier terme le nombre de transistors en 1972, c'est-à-dire $u(0) = 3\,500$.

2. L'année 1974 correspond au rang 1 de la suite u définie précédemment. On a $u(1) = 2 \times u(0) = 2 \times 3\,500 = 7\,000$.
Le processeur « 8080 » contenait donc 14 000 transistors.

40 Les fonctions f, g, h et m sont des fonctions exponentielles.

1. f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ car $3 > 1$.

2. g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ car $0{,}8 < 1$.

3. h est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ car $0{,}7 < 1$.

4. m est croissante car sur $[0\,;+\infty[$ $1{,}3 > 1$.

47 1. $1{,}15 \times 0{,}99 = 1{,}1385$. Donc ce prix a augmenté de 13,85 %.

2. Ce prix a subi deux évolutions successives, on a donc $(1 + t_{\text{moyen}})^2 = 1{,}1385$ soit $t_{\text{moyen}} = 1{,}1385^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 0{,}067$.

3. Puisque $1{,}15 \times 0{,}99 = 0{,}99 \times 1{,}15$, on obtiendra bien le même taux d'évolution moyen qu'on commence par la diminution de prix ou par l'augmentation.

Pour aller plus loin

55 1. D'après l'énoncé, la surface du nénuphar augmente de 10 % par jour. En notant u_n l'aire du nénuphar le n-ième jour après le début de l'observation, on obtient donc bien une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.

2. L'aire du nénuphar au bout de 10 jours est égale à $u_{10} = 0{,}5 \times 1{,}1^{10} \approx 1{,}30$ m².

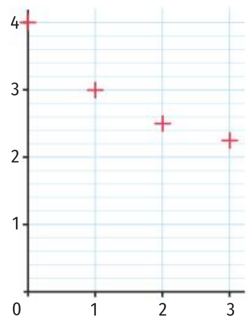
3. Numériquement on obtient que $u_n \geqslant 200$ lorsque $n \geqslant 63$.
Donc l'étang sera entièrement recouvert par le nénuphar au bout de 63 jours.

57 1. **a.** $u_1 = 0{,}5 \times 4 + 1 = 3$, $u_2 = 0{,}5 \times 3 + 1 = 2{,}5$ et $u_3 = 0{,}5 \times 2{,}5 + 1 = 2{,}25$.

b. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{4}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2{,}5}{3} = \frac{5}{6}$.

Ces deux rapports ne sont pas égaux donc u n'est pas une suite géométrique.

2.



3. **a.** Pour tout n entier naturel, on a
$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = (0{,}5u_n + 1) - 2 = 0{,}5u_n - 1 = 0{,}5(u_n - 2) = 0{,}5v_n$
donc v est bien une suite géométrique de raison 0,5.

b. On a $v_0 = u_0 - 2 = 4 - 2 = 2$ donc, comme v est une suite géométrique de raison 0,5, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 0{,}5^n = 2 \times 0{,}5^n$.

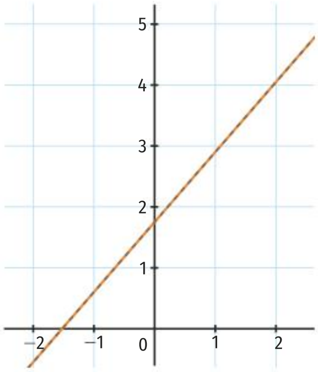
On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 2 = 2 \times 0{,}5^n + 2$.

Chapitre 5

Entraînement

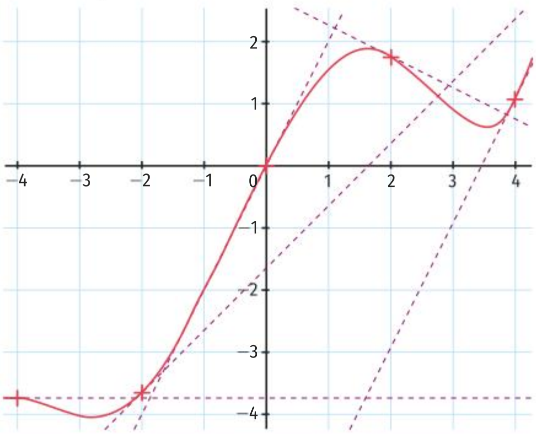
17 La tangente verte est tangente à la courbe en le point d'abscisse 0. La bleue en le point d'abscisse 1. La jaune en le point d'abscisse 4.

21 La courbe représentative d'une fonction affine est, par exemple, confondue avec ses tangentes.



25 On lit les coefficients directeurs des tangentes.
Graphiquement, on a $\ell'(0)=\frac{-1-0{,}5}{2-0}=-\frac{3}{4}$, $\ell'(1)=\frac{-2-1}{1-0{,}5}=-6$ et $\ell'(-1{,}5)=\frac{2-0{,}5}{2-(-1{,}5)}=\frac{3}{7}$.

30



Pour aller plus loin

37 **1.**
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h.$$
2. Lorsque h prend des valeurs très proches de 0, le taux de variations de f en $a=1$, qui s'exprime, d'après la question précédente, sous la forme $2+h$, prend des valeurs très proches de 2. Ainsi, f est dérivable en $a=1$ et $f'(1)=2$.

Chapitre 6

Entraînement

38 **1.** $f'(x)=\frac{1}{4}\times(2x-5-0)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$

2. $g'(x)=0-2x-3x^2=-3x^2-2x$

3. On commence par développer l'expression de h :
$h(x)=x^3+1{,}2x^2+8x$, et on en déduit que
$h'(x)=3x^2+2\times1{,}2x+8=3x^2+2{,}4x+8$.

4. On commence par développer l'expression de j :
$j(x)=(x-3)(x-3)=x^2-3x-3x+9=x^2-6x+9$, et on en déduit que $j'(x)=2x-6+0=2x-6$.

47 Pour tout $x\in[-2\,;2]$, $f'(x)=0{,}8x-0{,}25$.
On a $f'(x)>0$ si, et seulement si, $0{,}8x-0{,}25>0$ soit $0{,}8x>0{,}25$ et donc $x>0{,}3125$. De plus $f(-2)=1{,}1$, $f(0{,}3125)=-\frac{133}{128}$ et $f(2)=0{,}1$.

x	-2		$0{,}3125$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$1{,}1$	↘	$-\frac{133}{128}$	↗	$0{,}1$

Pour tout $x\in[-2\,;2]$,
$g'(x)=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$. Ainsi, $g'(x)\geqslant0$ et ne s'annule qu'en $x=-1$. De plus $g(-2)=-4$ et $g(2)=24$.

x	-2		-1		2
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de g	-4	↗		↗	24

50 Lorsque la courbe bleue prend des valeurs négatives, la courbe verte est décroissante. Lorsque la courbe bleue prend des valeurs positives, la courbe verte est croissante. La courbe verte représente donc la fonction et la bleue, sa fonction dérivée.

53 **1.** Au bout de 10 jours ce modèle prévoit
$f(10)=45\times10^2-10^3+100=3\,600$ personnes malades.

2. Pour tout $t\in[0\,;45]$, $f'(t)=45\times2t-3t^2=90t-3t^2=3t(30-t)$.

3. Pour tout $t\in[0\,;45]$, $3t>0$. De plus, $30-t>0$ si, et seulement si, $30>t$. En conclusion, $f'(t)$ est positive sur $[0\,;30]$ et négative sur $[30\,;45]$. On en déduit que f est croissante sur $[0\,;30]$ et décroissante sur $[30\,;45]$. Le nombre de malades est donc maximal au 30ᵉ jour et ce nombre vaut $f(30)=13\,600$.

Pour aller plus loin

62 Pour tout $x\in]-2\,;0[$, $f'(x)=2x+\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3+2}{x^2}$.
Or $2x^3+2=0$ équivaut à $x^3=-1$ soit à $x=-1$ et x^2 est toujours positif, donc $f'(x)$ est négative sur $]-2\,;-1]$ puis positive sur $[-1\,;0[$.

x	-2		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	5	↘	3	↗	

67 **1.** Pour tout $x>0$,
$C_M(x)=\frac{x^3-18x^2+124x+200}{x}=x^2-18x+124+\frac{200}{x}$.
Ainsi, pour tout $x>0$, $C'_M(x)=2x-18-\frac{200}{x^2}$.

2. Pour tout $x>0$,
$$\frac{2(x-10)(x^2+x+10)}{x^2}=\frac{2x^3+2x^2+20x-20x^2-20x-200}{x^2}$$
$$=\frac{2x^3-18x^2-200}{x^2}$$
$$=2x-18-\frac{200}{x^2}=C'_M(x).$$

3. x^2 et x^2+x+10 sont toujours positifs, le signe de $C'_M(x)$ ne dépend donc que du signe de $x-10$.

x	0		10		$+\infty$
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi le coût moyen minimal est obtenu pour 10 kg de safran. Il vaut alors $C_M(10)=64$ €.

Crédits

Couverture : Pexels/Pixabay, ultramarinfoto/Getty, IMAGE : NASA, ESA, CSA, STScI, MARUF_RAHMAN/Pixabay, Jacob Lund/Shutterstock, Vaclav Volrab/Shutterstock

Début du manuel : **6** William Perugini/Shutterstock, Stephen Barnes/Medical/Alamy, **7** Pexels/Pixabay

Automatismes : **15** Virrage Images/Shutterstock, **18** MaraZe/Shutterstock, **19** Matej Hudovernik/Shutterstock, **20** photoyh/Shutterstock, **21** RickyBennison/Wikimedia, **22** Marbury/Shutterstock, **23** Erik Mclean/Unsplash, **24** Africa Studio/Shutterstock, **25** monticello/Shutterstock

Chapitre 1 : **26** François-Séraphin Delpech/Wikimedia, Joseph V. Romanovsky, **27** CactiStaccingCrane/Wikimedia, **28** William Perugini/Shutterstock, **31** Cflm001/Wikimedia, LStockStudio/Shutterstock, **44** HJBC/Shutterstock, **45** William Perugini/Shutterstock, Jpbowen/Wikipedia

Chapitre 2 : **46** Stockholms Universitetsbibliotek/Wikimedia, Private Collection/Bridgeman, GRANGER - Historical Picture Archvie/Alamy, The Picture Art Collection/Alamy, **47** New York Public Library, MrReel/Wikimedia, Royal Society of London, **48** Stephen Barnes/Medical/Alamy, **59** lazyllama/Shutterstock, **61** funnyangel/Shutterstock, **63** Olekcii Mach/Alamy, **64** fotogestoeber/Shutterstock, **65** Stephen Barnes/Medical/Alamy, Classical Numismatic Group, Inc.

Chapitre 3 : **66** Domenico Fetti/Wikimedia, **67** Andrew.Lorenzs/Wikimedia, ART Collection/Alamy, Materialscientist/Wikimedia, **68** Pexels/Pixabay, **70** analogicus/Pixabay, **78** Svet foto/Shutterstock, **80** Gallo Images/Alamy, **81** ultramarinfoto/Getty, **83** rattanakk/Shutterstock, **85** Pexels/Pixabay, Catarina Belova/Shutterstock

Chapitre 4 : **86** Patrick Aventurier, **87** photobyphotoboy/Shutterstock, **88** PhotobyTawat/Shutterstock, **96** Gorodenkoff/Shutterstock, **103** Patrick Aventurier, GRANGER - Historical Picture Archvie/Alamy

Chapitre 5 : **104** Bayerische Staatsbibliothek München, Res/Astr.u 93-1/4, p.531, Christoph Bernhard Francke/Wikimedia, James Thronill after Sir Godfrey Kneller/Wikimedia, John Adams Library Collection, Boston Public Library, **105** Courtesy Lilly Library, Indiana University, Bloomington, Indiana, Caspar Netscher/Wikimedia, Jakob Emanuel Handmann/Wikimedia, **106** Action Plus Sports Images/Alamy, **121** Action Plus Sports Images/Alamy, Gorodenkoff/Shutterstock

Chapitre 6 : **122** Wirestock, Inc./Alamy, **124** Salty View/Shutterstock, **132** Choksawatdikorn/Shutterstock, **133** Jacob Lund/Shutterstock, **134** Gorodenkoff/Shutterstock, **135** Red_Baron/Shutterstock, **137** Dudarev Mikhail/Shutterstock, fotolotos/Shutterstock, **139** Wirestock, Inc./Alamy, ViktorKozlov/Shutterstock

Direction éditoriale : Virgile Lahu et Anatole Ertul.
Assistant éditorial : Guillaume Côte.
Maquette : Alejandra Adeikalam et Julie Meister.
Mise en page : Julie Meister et Chloé-Van Santy.
Infographie : Julie Meister et Chloé-Van Santy.
Iconographie : Guillaume Côte et Mélina Boyer.
Couverture : Alejandra Adeikalam et Julie Meister.
Retouches photo : Christine Lim.
Relecture : Stéphanie Hourcade.
Avec la participation de : Émilie Blanchard, Sandrine Lassere, Raphaël Taïeb, Nicolas Hémard, Raghad Alzhouri, Mellie Chapatte et Alexia Vicente.

Dépôt légal : août 2022.
ISBN : 979-10-400-0235-2.

Imprimé en France par BLG.
Impression : juillet 2022.

Lelivrescolaire.fr Éditions
14 rue Rhin et Danube
69009 Lyon
contact@lelivrescolaire.fr

FORMULES UTILES

Taux d'évolution et coefficient multiplicateur

Lorsqu'une quantité varie d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f on définit :

- la **variation absolue** : $\Delta V = V_f - V_i$;
- la **variation relative** (ou **taux d'évolution**) si $V_i \neq 0$: $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$;
- le **coefficient multiplicateur** : $CM = 1 + t$ qui permet d'obtenir la relation $V_f = CM \times V_i$.

Coefficient directeur d'une droite

Dans un repère, si deux points distincts $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ appartiennent à une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées, alors son **coefficient directeur** vaut $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Calculer des probabilités

Soient A et B deux événements d'un même univers tels que $P(B) \neq 0$.
La **probabilité conditionnelle** que l'événement A se réalise sachant que l'événement B s'est réalisé se note $P_B(A)$ et est définie par $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Les événements A et B sont dits **indépendants** lorsque $P_B(A) = P(A)$.

Suites

Une **suite arithmétique** u est entièrement définie par son premier terme $u(0)$ et sa **raison** r.
Relation de récurrence : pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n) + r$.
Forme explicite : pour tout entier naturel n, $u(n) = n \times r + u(0)$.

Une **suite géométrique** v est entièrement définie par son premier terme $v(0)$ et sa **raison** q.
Relation de récurrence : pour tout entier naturel n, $v(n+1) = v(n) \times q$.
Forme explicite : pour tout entier naturel n, $v(n) = v(0) \times q^n$.

Fonctions dérivées

Fonction	Fonction dérivée
Constante : $f(x) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identité : $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Carré : $f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Cube : $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Opérations sur les fonctions dérivées

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I et k un nombre réel.

Fonction à dériver	Fonction dérivée
$f+g$	$(f+g)' = f' + g'$
$k \times f$	$(k \times f)' = k \times f'$

Rappels sur les principes d'utilisation du tableur

Dans une classe de 25 élèves, on a organisé un examen sur les disciplines scientifiques. Chaque élève reçoit trois notes sur 10 : une en SVT, une en mathématiques et une en sciences physiques. Pour être admis, l'élève doit obtenir un total strictement supérieur à 15. De plus, s'il obtient plus de 5 à chaque note, il reçoit une mention spéciale.
On élabore alors la feuille de calcul suivante.

1 Dans la cellule **A3**, on écrit : **= A2 + 1**, puis on sélectionne la cellule **A3** et on étire son contenu vers le bas.

Remarques :

- La formule s'est copiée dans les cellules du dessous en s'adaptant.
  Par exemple, dans la cellule **A5**, il est écrit **= A4 + 1**.
- Si on ne veut pas que la formule écrite dans la cellule **A3** s'adapte quand on la copie, on peut écrire : **`= $A$2 + 1`**.
  Ainsi, c'est toujours à la cellule **A2** qu'il sera fait référence.

2 Dans la cellule **E2**, on écrit : **=SOMME (B2:D2)**.

En langage courant : Additionner les valeurs des cellules situées entre les cellules **B2** et **D2**.

3 Dans la cellule **F2**, on écrit : **=SI(E2>15; "Admis(e)" ; "Refusé(e)")**.

En langage courant : Si le contenu de la cellule **E2** est strictement supérieur à 15, alors afficher « Admis(e) ». Sinon afficher « Refusé(e) ».

	A	B	C	D	E	F	G
1	Numéro du candidat	Maths /10	Physique /10	SVT /10	Total /30	Résultat	Mention spéciale
2	1	7	10	10	27	Admis(e)	Oui
3	2	1	9	9	19	Admis(e)	Non
4	3	3	4	4	11	Refusé(e)	Non
5	4	9	10	5	24	Admis(e)	Non
6	5	6	7	4	17	Admis(e)	Non
7	6	5	5	8	18	Admis(e)	Non
8	7	1	7	2	10	Refusé(e)	Non
9	8	2	10	6	18	Admis(e)	Non
10	9	9	8	8	25	Admis(e)	Oui
11	10	8	7	7	22	Admis(e)	Oui
12	11	7	8	0	15	Refusé(e)	Non
13	12	4	6	0	10	Refusé(e)	Non
14	13	6	10	1	17	Admis(e)	Non
15	14	5	6	5	16	Admis(e)	Non
16	15	7	8	8	23	Admis(e)	Oui
17	16	10	8	8	26	Admis(e)	Oui
18	17	10	9	9	28	Admis(e)	Oui
19	18	3	4	1	8	Refusé(e)	Non
20	19	7	5	8	20	Admis(e)	Non
21	20	8	6	6	20	Admis(e)	Oui
22	21	6	7	2	15	Refusé(e)	Non
23	22	6	8	3	17	Admis(e)	Non
24	23	5	5	6	16	Admis(e)	Non
25	24	4	7	7	18	Admis(e)	Non
26	25	9	2	3	14	Refusé(e)	Non
27	Moyenne	5,92	7,04	5,2	18,16		

4 Dans la cellule **B27**, on écrit : **=MOYENNE(B2:B26)**.

En langage courant : Calculer la moyenne du contenu des cellules situées entre les cellules **B2** et **B26**.

5 Dans la cellule **G2**, on écrit : **=SI(ET (B2>5 ; C2>5 ; D2>5); "Oui" ; "Non")**. **En langage courant** : Si les valeurs des cellules **B2**, **C2** et **D2** sont toutes supérieures à 5, alors afficher « Oui ». Sinon afficher « Non ».

Application aux suites numériques : On peut se servir du tableur pour calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence.

Exemple : La suite ci-contre est définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

fx =RACINE(B6+5)

	A	B	C
1	n	u(n)	
2	0	-2	
3	1	1,732	
4	2	2,595	
5	3	2,756	
6	4	2,785	
7	5	=RACINE(B6+5)	

Instructions utiles

=ALEA() : cette fonction renvoie un nombre au hasard dans l'intervalle $[0\,;1[$.

=ALEA.ENTRE.BORNES(a;b) : cette fonction renvoie un nombre entier aléatoire dans l'intervalle $[a\,;b]$, où a et b sont des entiers tels que $a < b$.

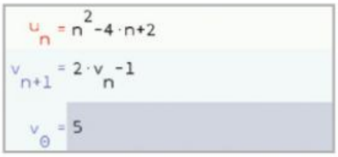
=NB.SI(cellule1 : cellule2 ; valeur) : cette fonction compte le nombre d'apparitions de **valeur** dans la plage délimitée par la cellule 1 et la cellule 2.

CALCULATRICES NumWorks

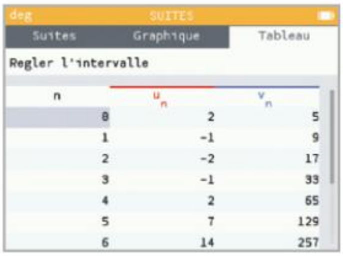
Suites

Dans l'application **Suite**, lorsqu'on ajoute une suite, on choisit son type (explicite ou récurrente). En sélectionnant u_n on peut modifier le type d'une suite préalablement ajoutée.

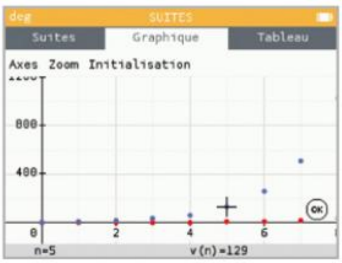
Ici, (u_n) est définie explicitement et (v_n) est définie par récurrence.



Pour définir une suite par récurrence,
v_n s'obtient avec .
« Afficher les valeurs » permet d'obtenir les termes de la suite.



« Régler l'intervalle » sert à modifier **début**, **fin** et **pas** de la table.
« Tracer le graphique » sert à représenter les points de coordonnées $(n\,;u_n)$.

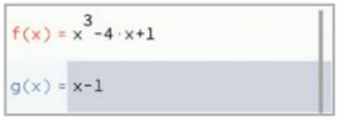


Probabilités

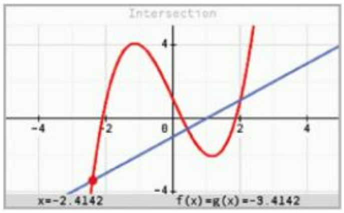
Pour obtenir un nombre au hasard entre 0 et 1, appuyer sur . Choisir « Aléatoire et approximation » puis « random() ».

Équations

Résolution graphique d'une équation, par exemple :
$x^3-4x+1=x-1$.
Dans l'application **Fonctions**, on entre les expressions concernées.



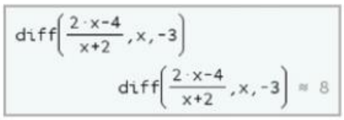
« Tracer le graphique » puis OK,
« Calculer » et « Intersection ».



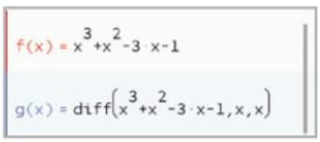
Les abscisses des points obtenus donnent les solutions de l'équation.
Utiliser les flèches pour obtenir les autres solutions.
On peut, de même, résoudre $f(x)=k$ en traçant la droite d'équation $y=k$.

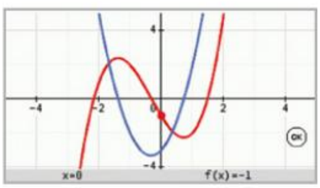
Dérivation

Dans l'application **Calculs**, utiliser la touche puis « Calculs » et « diff(f(x), x, a) ».



On obtient ainsi une valeur (parfois approchée) du nombre dérivé. On indique la variable en deuxième position et le nombre pour lequel on fait le calcul en troisième position. On peut tracer la courbe représentative de la fonction dérivée dans l'application **Fonction**.

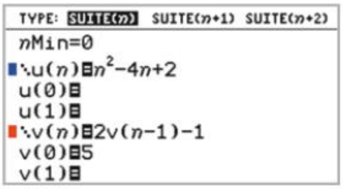




Suites

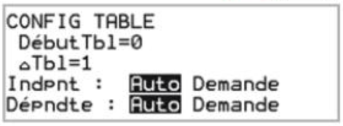
Touche mode pour obtenir le mode **Suite**,

puis f(x) pour saisir l'expression de la suite.



Ici, (u_n) est définie explicitement et (v_n) est définie par récurrence. v s'obtient avec 2nde 8.

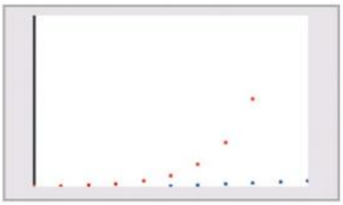
On règle la table de valeurs avec 2nde fenêtre.



2nde graphe pour afficher la table de valeurs.

n	u(n)	v(n)		
0	2	5		
1	-1	9		
2	-2	17		
3	-1	33		
4	2	65		
5	7	129		
6	14	257		
7	23	513		
8	34	1025		
9	47	2049		
10	62	4097		

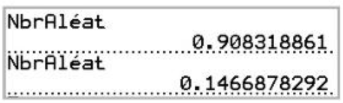
graphe pour représenter les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.



Probabilités

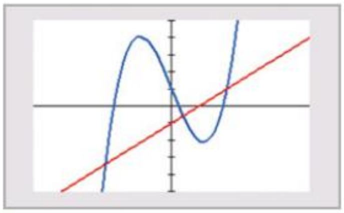
Pour obtenir un nombre au hasard entre 0 et 1 :

math ‹ ‹ puis entrer.



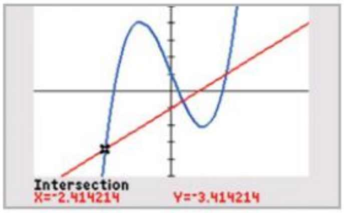
Équations

Résolution graphique d'une équation, par exemple : $x^3 - 4x + 1 = x - 1$.



Touche 2nde puis trace et « intersection ».

Choisir les deux courbes concernées puis déplacer le curseur au plus proche de l'intersection puis entrer.



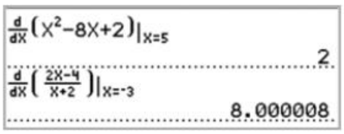
L'abscisse du point obtenu donne une solution de l'équation.

Les autres solutions s'obtiennent de la même manière.

On peut, de même, résoudre $f(x) = k$ en traçant la droite d'équation $y = k$.

Dérivation

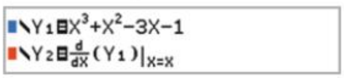
Touche math puis 8 pour accéder à la fonctionnalité dérivation.

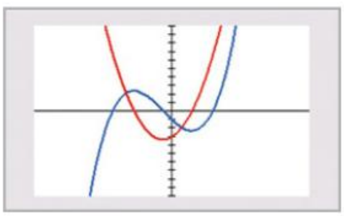


On obtient ainsi une valeur (parfois approchée) du nombre dérivé.

On peut tracer la courbe représentative de la fonction dérivée de la même manière dans le mode **fonction**.

Y_1 s'obtient avec var › entrer entrer.

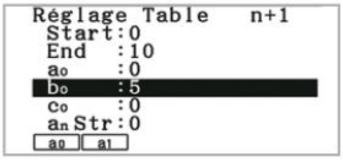




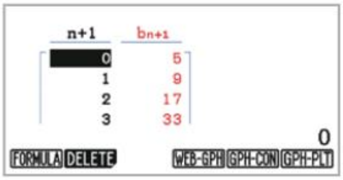
Suites

Dans le menu **Récurrence**, on choisit le type de suite avec F3.

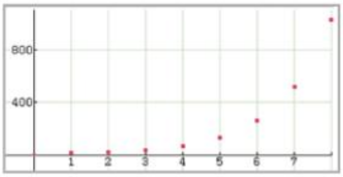
Dans l'écran de saisie des suites,
F5 pour régler la table et le graphique.



F6 pour afficher les termes de la suite.

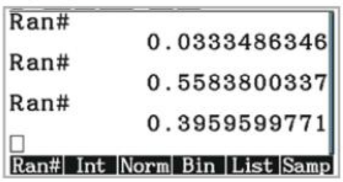


Dans la table de valeurs, F6 pour représenter les points de coordonnées $(n\ ;\ a_n)$.



Probabilités

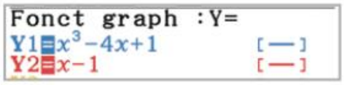
Dans le menu **Exe-Mat**, pour obtenir un nombre au hasard entre 0 et 1 :
OPTN F6 F3 F4 F1.



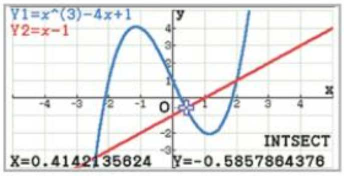
Équations

Résolution graphique d'une équation, par exemple : $x^3 - 4x + 1 = x - 1$.

Dans le menu **Graphe**, on entre les expressions concernées puis F6.



F5 F5 pour obtenir les points d'intersection des deux courbes.



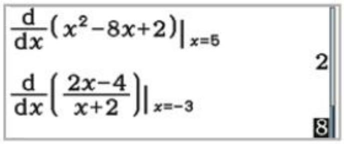
Les abscisses des points obtenus donnent les solutions de l'équation.

Utiliser les flèches pour obtenir les autres solutions.

On peut, de même, résoudre $f(x) = k$ en traçant la droite d'équation $y = k$.

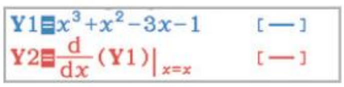
Dérivation

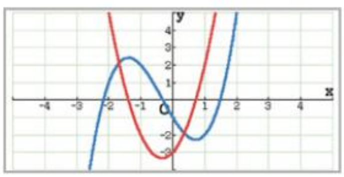
Dans le menu **Exe-Mat**, OPTN F4 F2 donne d/dx. On indique la fonction à dériver entre les parenthèses puis le nombre pour lequel on effectue le calcul après le =.



On obtient ainsi une valeur (parfois approchée) du nombre dérivé.

Dans le menu **Graphe**, on peut tracer la courbe représentative d'une fonction dérivée avec OPTN F2 F1 puis F1 pour obtenir **Y** puis 1 si on souhaite dériver **Y1**.





Gratuit et libre d'accès

Gratuit pour le professeur

► Vidéoprojection
Toutes les ressources du manuel projetables en haute définition : zoomez sur les graphiques, agrandissez les exercices, etc.

► Livre du professeur
Tous les corrigés des exercices à télécharger sur LLS.fr/LivreDuProf.

Gratuit pour l'élève

► Révisions
Tout le contenu du manuel accessible en ligne pour réviser sur son ordinateur ou sur son smartphone.

► Dyslexie
Un mode de lecture numérique spécialement conçu pour les élèves dyslexiques.

► Enrichissements
Des exercices numériques supplémentaires pour s'entraîner en autonomie.

Un Manuel Numérique Premium sur abonnement

- ✓ Application pour un accès hors connexion
- ✓ Connexion sécurisée en un clic
- ✓ Manuel 100 % personnalisable
- ✓ Suivi individualisé des élèves
- ✓ Module de révision
- ✓ Ressources et outils exclusifs pour votre discipline

Pour en savoir plus : LLS.fr/Premium

9 791040 002352