Métropole, Bac Gé., 13 Septembre 2021, sujet n°1

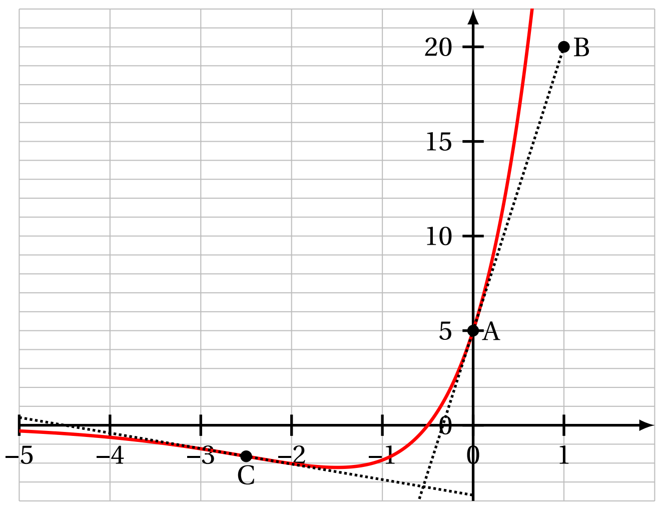
Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous et un seul des deux exercices A ou B.

Exercice 1 [COMMUN] .... (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0;5)$ et B de coordonnées $(1;20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse $-2{,}5$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

Les questions 1. à 3. se rapportent à cette même fonction f.



1. On peut affirmer que :
   (a) $f'(-0{,}5) = 0$
   (b) si $x \in \left]-\infty\,;-0{,}5\right[$, alors $f'(x) < 0$
   (c) $f'(0) = 15$
   (d) la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0{,}5;0)$.
   On peut affirmer que :

(a) $a = 10$ et $b = 5$
(b) $a = 2{,}5$ et $b = -0{,}5$
(c) $a = -1{,}5$ et $b = 5$
(d) $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $]-\infty\,; -0{,}5[$ par :

$$f''(x) = (10x + 25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

(a) La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$
(b) La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$
(c) Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$
(d) $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

— pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{V}_n$;
— $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{V}_n = 2$.

On peut affirmer que :

(a) la suite (U_n) converge
(b) pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_n \leqslant 2$
(c) la suite (U_n) diverge
(d) la suite (U_n) est majorée

Exercice 2 [COMMUN] .... (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,; +\infty\right[$.

(a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
(c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

3. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_{\mathrm{P}} < \mathrm{E}$.

Code Python

```
def seuil(E) :
    u = 0.5
    n = 0
    while ............
        u = ..........
        n = n+1
    return n
```

(b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $\mathrm{E} = 10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

(c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0{,}25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 [COMMUN] .... (5 points)

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».
Les parties **I** et **II** peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.
Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = \left(0{,}04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0\,;120].$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;120]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer, en faisant apparaitre les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;120]$ on a :

$$f'(t) = t(t - 100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).
4. Selon cette modélisation :
   (a) Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?
   (b) Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.
   (c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus ?

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

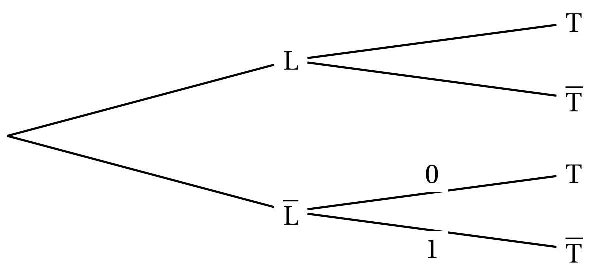
Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la « Chytridiomycose », provoquée par un champignon.
Le chercheur considère que :

— Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.

— Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de 0,74.

Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.
Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.
Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.
On notera T l'évènement « Le têtard est contaminé par la maladie » et L l'évènement « Le lac est infecté par le champignon ».
On notera $\overline{\text{L}}$ l'évènement contraire de L et $\overline{\text{T}}$ l'évènement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité P(T) que le têtard prélevé soit contaminé est de 0,185.
3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté ?

Exercice [AU CHOIX] .... (5 points)

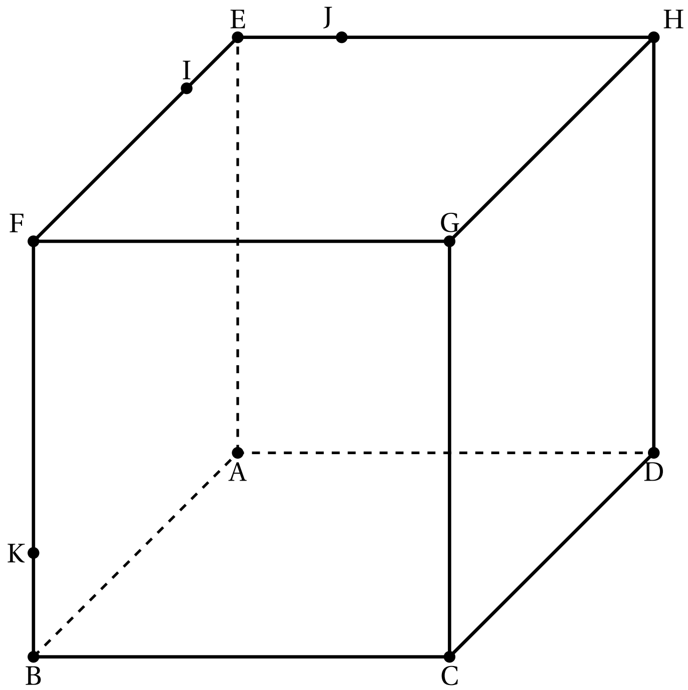
Le candidat doit traiter ***un seul des deux exercices*** *A ou B.*
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A .... (5 points)

Principaux domaines abordés :

- **Géométrie dans l'espace rapporté à un repère orthonormé**
- **Orthogonalité dans l'espace**

On considère le cube ABCDEFGH donné ci-dessous.



On donne trois points I, J et K vérifiant :

$$\overrightarrow{RI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}, \qquad \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}, \qquad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}.$$

Les points I, J et K sont représentés sur la figure donnée en annexe, à compléter et à rendre avec la copie.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).

6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).
7. Soit $M\left(\frac{1}{4}\,;1\,;0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

Exercice B .... (5 points)

Principaux domaines abordés :

- **Fonction logarithme**
- **Équation à paramètre**

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.
   Justifier que l'on a : $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

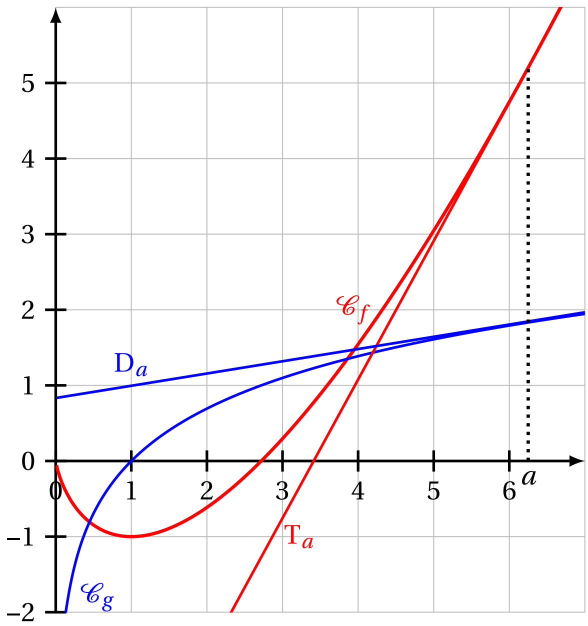
$$f(x) = x\ln(x) - x \text{ et } g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

— T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a ;

— D_a la tangente à $\mathscr{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

   On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.
3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.