Polynésie, Bac Gé., 30 Août 2022, sujet n°2

Le candidat traite trois des **4 exercices** proposés.

Exercice 1 [Thèmes : probabilités] .... (7 points)

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

— lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;

— lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

— A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;

— T : « le test est positif » ;

— $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0{,}262\,5$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4. (a) Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.
   (b) On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
   Démontrer que $p(E) = 0{,}062\,5$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}062\,5$.
   (b) Calculer $P(X = 7)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?

Exercice 2 [Thèmes : suites, fonctions] .... (7 points)

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

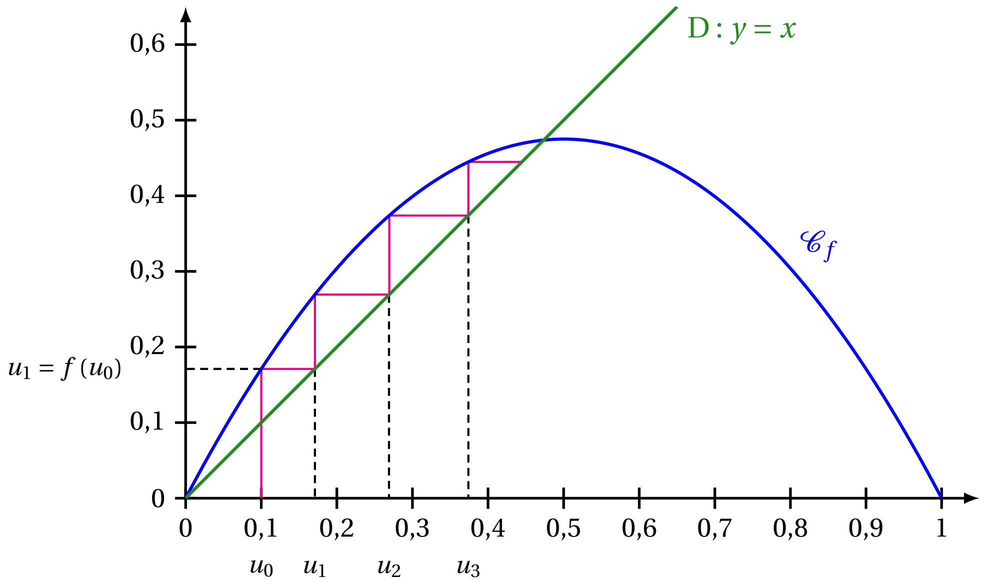
$$u_{n+1} = ku_n(1-u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9u_n(1-u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 1{,}9x(1-x)$.
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   (b) En déduire que si $x \in [0\,;1]$ alors $f(x) \in [0\,;1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. (a) En utilisant les résultats de la question 1., démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.
   (c) Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(1-u_n)$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.
On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

Code Python

```python
def algo(p) :
    u = 1/4
    n = 0
    while u > 10**(-p) :
        u = 1/2*u*(1-u)
        n = n+1
    return(u)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

Exercice 3 [Thèmes : fonctions] .... (7 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		e		$+\infty$
g	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	↘	0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

(a) la valeur $\frac{2}{\mathrm{e}}$;

(b) les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;

(c) les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

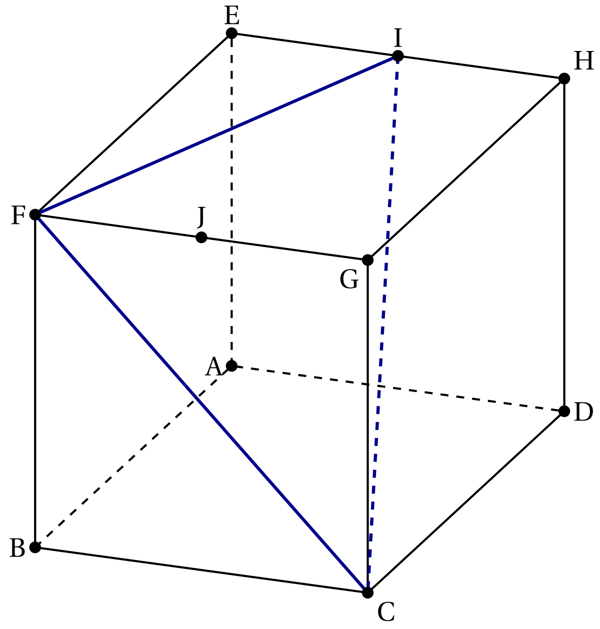
Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.
2. À l'aide de la **partie 1**, étudier :
   (a) la convexité de la fonction f ;
   (b) les variations de la fonction f.
3. (a) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.
   (b) En déduire que, pour tout réel x dans $]0\,;\mathrm{e}]$:

$$[\ln(x)]^2 \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1.$$

Exercice 4 [Thèmes : géométrie dans le plan et l'espace] .... (7 points)

On considère le cube ABCDEFGH.
On note I le milieu du segment [EH] et on considère le triangle CFI.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;dfrac12\,;1\right)$ dans ce repère.



1. (a) Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

   (b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

   (c) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   (b) Démontrer que le point $\mathrm{K}\left(\dfrac{7}{9}\ ;\ \dfrac{5}{9}\ ;\ \dfrac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

   (c) Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\dfrac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.
   On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times b\times h,$$

   où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

   (a) Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\dfrac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

   (b) En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.