



Métropole, Bac Gé., 11 septembre 2023, sujet n°1

Exercice 1.....(5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = xe^{x^2-3}.$$

Une des primitives F de la fonction f sur \mathbb{R} est définie par :

a. $F(x) = 2xe^{x^2-3}$

b. $F(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-3}$

c. $F(x) = \frac{1}{2}xe^{x^2-3}$

d. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-3}$

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = e^{2n+1}.$$

La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2

b. géométrique de raison e

c. géométrique de raison e^2

d. convergente vers e

Pour les questions 3. et 4., on considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 15 \text{ et, pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = 1,2u_n + 12.$$

3. La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n > 10000$.

```

</> Code Python
1 def seuil() :
2     n = 0
3     u = 15
4     while .....:
5         n = n+1
6         u = 1,2u + 12
7     return(n)

```

À la ligne 4, on complète par :

a. $u \leq 10000$

b. $u = 10000$

c. $u > 10000$

d. $n \leq 10000$

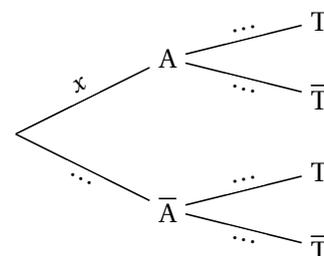
— T l'évènement « l'individu présente un test positif ».

On notera \bar{A} et \bar{T} les évènements contraires de A et T.

On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : $x = p(A)$.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2. **a.** Démontrer l'égalité : $p(T) = 0,927x + 0,043$.
 b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.
3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
 « Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».



Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Exercice 4.....(5 points)

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln(x) \text{ où } \ln \text{ désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[= I$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $(x^2 - 2x + 2)$
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0,5; 1]$, que l'on notera α .
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0; +\infty[= I$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[= I$ par :

$$f(x) = e^x \ln(x).$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que, pour tout nombre réel $x > 0$:

$$f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right).$$

Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f''(x) = e^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln(x) \right)$.

On pourra remarquer que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = e^x \times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la partie A.

2. **a.** Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Justifier.
b. Justifier que la courbe \mathcal{C}_f admet un unique point d'inflexion A.
c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Justifier.
3. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b. Montrer que $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1 - \alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
c. Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.
d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$.