Nouvelle-Calédonie, Bac Gé., 28 août 2023, sujet n°1

Exercice 1 .... (5 points)

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.

On sait que :

— 60 % des clients choisissent un bateau à voile ; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE.

— 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit un hasard un client et on considère les événements :

— V : « le client un bateau à voile » ;

— L : « le client prend l'option PILOTE ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à 0,30.
4. En déduire $P_{\overline{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.
   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile ? Arrondir à 0,01 près.

Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à 0,12. Cette probabilité n'est que de 0,005 si le client prend l'option PILOTE.

On considère un client. On note A l'événement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P(\overline{L} \cap A)$.
2. L'entreprise loue 1 000 bateaux. À combien d'avaries peut-on s'attendre ?

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.

On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

Exercice 2 .... (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) Démontrer que $u_1 = 12$.
   (b) Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
   (c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   Donner sa raison et son premier terme v_0.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

   (d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.

Code Python

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ......... :
        u = .........
        n = n+1
    return n
```

   (a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
   (b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

Exercice 3 .... (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$.
   Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

   a. $\mathrm{F}(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^x$ **b.** $\mathrm{F}(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$

   c. $\mathrm{F}(x) = (2+x)\,\mathrm{e}^x$ **d.** $\mathrm{F}(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\mathrm{e}^x$

* *
*

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

2. On considère les droites (d_1) et (d_2) dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\quad \begin{cases} x = 2 + r \\ y = 1 + r \\ z = -r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})\,; \qquad (d_2)\quad \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -1 + s \\ z = 2 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

   Les droites (d_1) et (d_2) sont :

   a. sécantes. **b.** strictement parallèles.

   c. confondues. **d.** non coplanaires.

3. On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est : $2x - y + z - 1 = 0$.
   On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 4 + u \\ z = 1 - u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

   La droite (Δ) est :

   a. sécante et non orthogonale au plan (P). **b.** incluse dans le plan (P).

   c. strictement parallèle au plan (P). **d.** orthogonale au plan (P).

4. On considère le plan (P_1) dont une équation cartésienne est $x - 2y + z + 1 = 0$, ainsi que le plan (P_2) dont une équation cartésienne est $2x + y + z - 6 = 0$.
   Les plans (P_1) et (P_2) sont :

   a. sécants et perpendiculaires. **b.** confondus.

   c. sécants et non perpendiculaires. **d.** strictement parallèles.

5. On considère les points $\mathrm{E}(1\,;2\,;1)$, $\mathrm{F}(2\,;4\,;3)$ et $\mathrm{G}(-2\,;2\,;5)$.
   On peut affirmer que la mesure α de l'angle $\widehat{\mathrm{FEG}}$ vérifie :

   a. $\alpha = 90°$ **b.** $\alpha > 90°$ **c.** $\alpha = 0°$ **d.** $\alpha \approx 71°$

Exercice 4 .... (5 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sut l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Démontre : que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   (b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$, est au-dessus de ses tangentes.
   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. (a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
5. (a) En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   (b) En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.