Polynésie, Bac Gé., 14 Mars 2023, sujet n°1

Exercice 1 [PROBABILITÉS ET SUITES] .... (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente, que :

— si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;

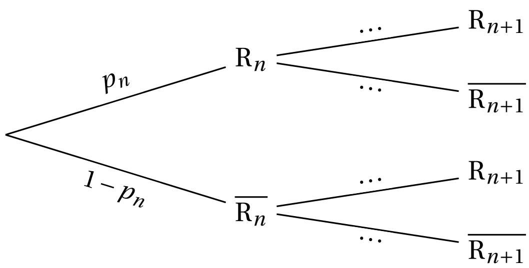
— si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

— R_n l'événement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,

— p_n la probabilité de l'événement R_n. On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.
   (c) En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.
   (d) Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraineur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0, 75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies.

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $P(X \geqslant 9)$, à 10^{-3} près.

Exercice 2 [ESPACE] .... (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère :

— le point $A(1;-1;-1)$;
— le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation : $5x+2y+4z=17$;
— le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x+14y+3z=19$;
— la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 3-2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

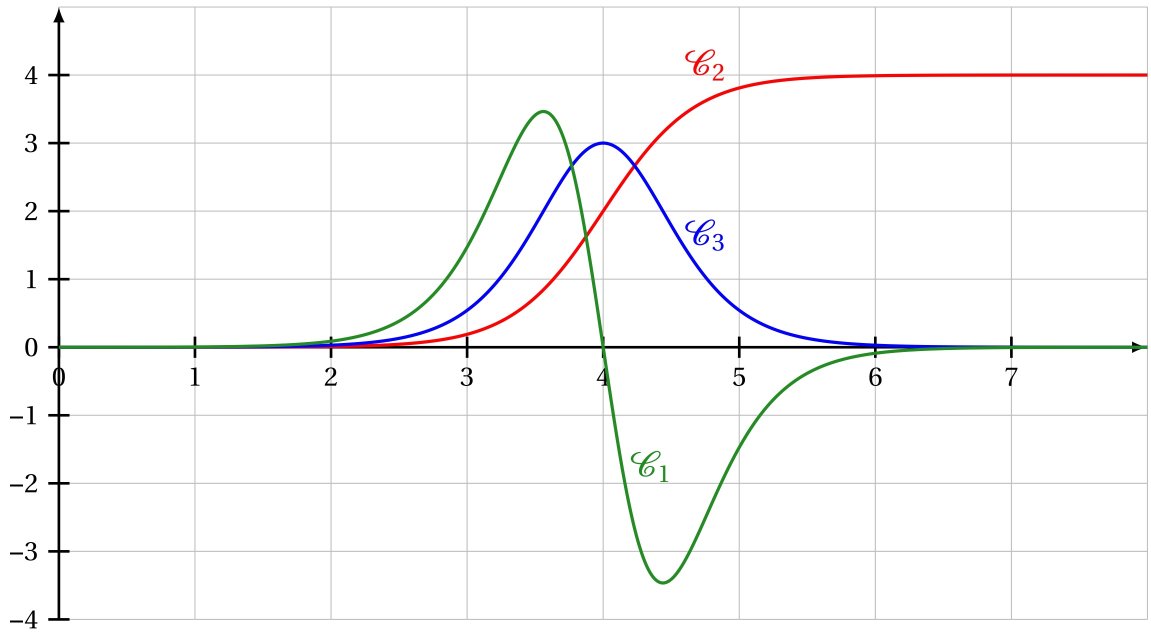
1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. (a) Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.
   (b) Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.
4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t;-t;3-2t)$.
   On considère alors f la fonction qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t) = AM^2$.
   (a) Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.
   (b) Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3;-1;1)$.
5. On note H le point de coordonnées $(3;-1;1)$. Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice 3 [FONCTIONS] .... (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner, avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$.

Partie B

Soit un réel k strictement positif. On considère la fonction g définie sur R par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Prouver que $g'(0) = k$.
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

▶ Calcul formel

1	g(x)=4/(1+e^(-k x)) $\rightarrow \quad g(x) = \dfrac{4}{e^{-kx}+1}$
2	Simplifier(g"(x)) $\rightarrow \quad g''(x) = -4e^{kx}\left(e^{kx}-1\right)\dfrac{k^2}{\left(e^{kx}+1\right)^3}$

Exercice 3 [SUITES, LN, ALGO] .... (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation** : La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.
2. **Affirmation** : Toute suite bornée est convergente.
3. **Affirmation** : Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$.

   Affirmation : La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\,;1]$.
5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste `L` de nombres en paramètre. On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste `L`.

   Code Python

   ```python
   def mystere(L) :
       M = L[0]
       #On initialise M avec le premier élément de la liste L
       for i in range(len(L)) :
           if L[i] > M :
               M = L[i]
       return M
   ```

   Affirmation : L'exécution de `mystere([2,3,7,0,6,3,2,0,5])` renvoie 7.