La Réunion, Bac Ge., 29 Mars 2023, sujet n°2

Exercice 1 .... (5 points)

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.
On suppose que chaque client achète un seul matelas.
On dispose des informations suivantes :

— 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.

— 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

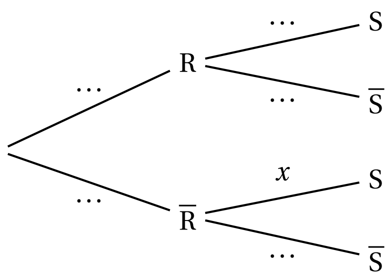
On choisit au hasard un client et on note les évènements :

— R : « le client achète un matelas RESSORTS »,

— S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$, où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. Démontrer que $x = 0,8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
   Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
   On arrondira le résultat à 10^{-2}.



Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
   On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
   (a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
   (a) On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
   Démontrer que $p_n = 0,82^n$.
   (b) Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$.
   Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 .... (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

   (a) Calculer v_1.

   (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

   (c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).
   En déduire la limite de (u_n).

5. On considère la fonction Python `seuil` ci-dessous, où `A` est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Code Python

```python
def seuil(A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n+1
    return n
```

   Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande `seuil(2.001)` puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 .... (5 points)

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On considère le point $A(1\,;1\,;0)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $x+4y+2z+1=0$.

1. On note (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de (d).
2. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point B dont les coordonnées sont $(1\,;-1\,;1)$.
3. On considère le point $(1\,;-1\,;-1)$.
   (a) Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4. (a) Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.
   (b) Soit H le milieu du segment [BC].
   Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.
5. Soit D le point de coordonnées $(0\,;-1\,;1)$.
   (a) Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.
   (b) Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide ABCD.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par :
   $$V=\frac{1}{3}\mathscr{B}\times h,$$
   où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

Exercice 4 .... (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x}$.
   Le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = -\dfrac{73}{100}$ est égal à :

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) une infinité.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}.$$

   La limite de la fonction g en $-\infty$ est égale à :

   (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) 0 (d) elle n'existe pas.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$h(x) = (4x - 16)\mathrm{e}^{2x}.$$

   On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère orthogonal.
   On peut affirmer que :

   (a) h est convexe sur $\mathbb{R}$. (b) $\mathscr{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3$.
   (c) h est concave sur $\mathbb{R}$. (d) $\mathscr{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3{,}5$.

4. On considère la fonction k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

   $$k(x) = 3\ln(x) - x.$$

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction k dans un repère orthonormé.
   On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
   Une équation de T est :

   (a) $y = (3-\mathrm{e})x$ (b) $y = \left(\dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)x$
   (c) $y = \left(\dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1\right)x + 1$ (d) $y = (\mathrm{e}-1)x + 1$

5. On considère l'équation $[\ln(x)]^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, avec $x \in\,]0\,;+\infty[$.
   Le nombre de solutions de cette équation est égal à :

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) une infinité.