BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session 2016

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :

Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

Documents à rendre avec la copie :

– Annexe ....page 6/6

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

<u>EXERCICE 1</u> (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
On arrondira les résultats des calculs de probabilité à 10^{-3}.

Une entreprise fabrique des dragées de deux sortes : aux amandes ou au chocolat.

Partie A – Probabilités conditionnelles

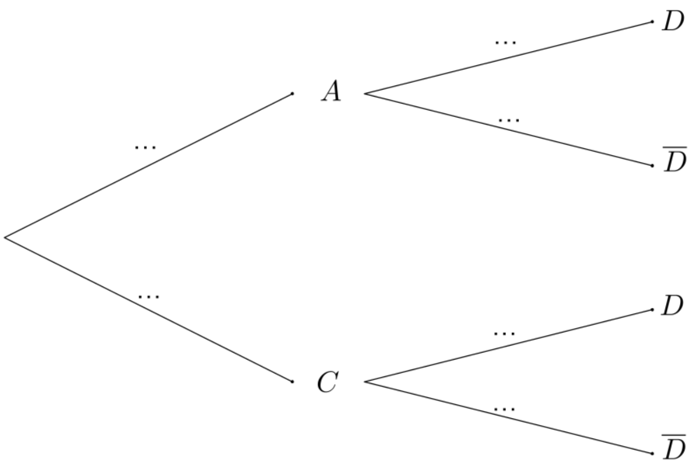
On sait que 60 % des dragées produites sont des dragées aux amandes ; les autres sont des dragées au chocolat.
Une étude statistique a montré que 5 % des dragées aux amandes et que 4 % des dragées au chocolat présentent un défaut d'ordre esthétique.
On choisit au hasard une dragée dans la production. Toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.
On note :

- A l'évènement : « la dragée est aux amandes »,
- C l'évènement : « la dragée est au chocolat »,
- D l'évènement : « la dragée présente un défaut ».

On rappelle que pour un évènement E, $P(E)$ désigne la probabilité de E et $\bar{E}$ désigne l'évènement contraire de E.

1. Déduire des informations contenues dans l'énoncé les probabilités $P(A)$, $P(C)$, $P_A(D)$ et $P_C(D)$.

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



3. Décrire par une phrase l'événement $A \cap D$ et calculer sa probabilité**.**

4. Montrer que $P(D) = 0{,}046$.

5. Montrer que la probabilité que la dragée soit aux amandes sachant qu'elle présente un défaut est environ 0,652.

Partie B – Loi binomiale

On s'intéresse dans cette partie à la production de dragées au chocolat.
On note E l'évènement : « la dragée au chocolat présente un défaut ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,04.
On prélève au hasard 100 dragées de la production. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 dragées.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 dragées, associe le nombre de dragées de ce prélèvement présentant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Justifier que l'espérance de la variable aléatoire X est 4 et interpréter par une phrase ce résultat.

3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement, exactement 5 dragées présentent un défaut.

4. On se propose de calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins 6 dragées présentent un défaut.
   a) Parmi les quatre expressions suivantes, donner celle qui permet de calculer cette probabilité :

$P(X < 6)$	$P(X > 6)$	$P(X \leq 6)$	$P(X \geq 6)$

   b) Calculer cette probabilité.

Partie C – Loi normale

On s'intéresse dans cette partie à la production de dragées aux amandes.
On prélève au hasard 1000 dragées de la production. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 dragées.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1000 dragées, associe le nombre de dragées de ce prélèvement présentant un défaut.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}05$ et on décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale d'espérance 50 et d'écart-type $6{,}89$.

1. Justifier les valeurs des paramètres de cette loi normale.

2. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 50 et d'écart type $6{,}89$.
   À l'aide de la loi de probabilité de Z, estimer la probabilité qu'il y ait au plus 40 dragées présentant un défaut dans le prélèvement, c'est-à-dire calculer $P(Z \leq 40{,}5)$ en raison de la correction de continuité due à l'approximation de la loi de Y par celle de Z.

3. a) Donner la valeur arrondie à 0,1 d'un nombre réel a tel que :
   $$P\,(50 - a \leq Z \leq 50 + a) = 0{,}95.$$
   b) Sans utiliser la calculatrice, expliquer pourquoi $P(Z \leq 36) \leq 0{,}025$. *Dans cette question, toute trace de recherche, en particulier graphique, sera prise en compte dans la notation.*

<u>EXERCICE 2</u> (10 points)

Un formulaire est disponible en fin d'exercice.

Partie A – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par $f(x) = x + 0{,}5 + \mathrm{e}^{-x+1}$.

On a tracé en annexe, dans un plan muni d'un repère orthonormé, la courbe C représentative de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = 1{,}3x$.

1. Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[0; 5]$ l'inéquation $f(x) \leq 1{,}3x$.
   On fera apparaître les constructions utiles **sur le graphique de l'annexe à rendre avec la copie**.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.
   a) Calculer $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 5]$.

   b) Justifier que l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{-x+1} \geq 0$ a pour solution l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq 1$.

   c) Déduire de la question b) le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $[0; 5]$.

3. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.
   On fera figurer dans ce tableau les valeurs particulières (extrema et valeurs aux bornes) en donnant éventuellement un arrondi à 10^{-2} de ces valeurs.

4. a) En utilisant la méthode de votre choix, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ dans l'intervalle $[0; 5]$.

   b) Donner, à l'aide de votre calculatrice, un encadrement à 10^{-2} près des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 4$ dans l'intervalle $[0; 5]$.

Partie B – Calcul intégral.

Un logiciel de calcul formel a permis de déterminer une fonction primitive F de f sur $[0; 5]$.

On a obtenu

$$F(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x - \mathrm{e}^{-x+1}$$

1. On note $I = \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = 15 - \mathrm{e}^{-4}$.

2. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} de la valeur moyenne de f sur $[1; 5]$.

Partie C – Application.

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 500 pièces destinées à l'équipement informatique.

Lorsqu'elle produit x centaines de pièces, avec $1 \leq x \leq 5$, le coût total de production, en centaines d'euros, est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A de l'exercice 2.

Chaque pièce est vendue 1,30 euros. La recette perçue par la vente de x centaines de pièces vaut donc $1{,}3x$ centaines d'euros.

1. Calculer le coût total de fabrication de 300 pièces.
   En déduire le bénéfice engendré par la fabrication et la vente de ces 300 pièces.
   On arrondira les résultats à l'euro près.

2. Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats obtenus dans les parties précédentes.
   a) Combien l'entreprise doit-elle fabriquer de pièces au minimum pour que le coût total de production dépasse 400 € ?

   b) Déterminer le nombre minimal de pièces qu'il faut fabriquer et vendre pour que l'entreprise réalise un bénéfice journalier.

Formulaire

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I, et on a

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. La valeur moyenne m de la fonction f sur $[a; b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)dt$$

ANNEXE – À RENDRE AVEC LA COPIE