BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

COMPTABILITE ET GESTION

# EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Session 2018

Durée : 2 heures

Coefficient : 3

**Matériel autorisé :**

Calculatrice autorisée (conformément à la circulaire n°2015-178 du 1/10/2015)

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation de la copie

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6,

dont un document réponse en page 6/6 à remettre avec la copie

**EXERCICE 1 (9 points)**

Dans ce problème, on s'intéresse à l'évolution de l'espérance de vie à la naissance des femmes en France.

On a relevé dans le tableau ci-dessous l'espérance de vie à la naissance des femmes en France chaque année entre 2006 et 2016. Par exemple, une femme née en France en 2006 a une espérance de vie de 84,2 ans.

| Année de naissance | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Espérance de vie en année. | 84,2 | 84,4 | 84,3 | 84,4 | 84,6 | 85 | 84,8 | 85 | 85,4 | 85,1 | 85,4 |

Source : TEF, édition 2016 - Insee Références

## PARTIE A : Ajustement affine

Le tableau suivant, où $x_i$ désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2006, donne l'espérance de vie à la naissance des femmes $y_i$, mesurée en année, en France entre 2006 et 2016.

| Année de naissance | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Espérance de vie $y_i$ en année. | 84,2 | 84,4 | 84,3 | 84,4 | 84,6 | 85 | 84,8 | 85 | 85,4 | 85,1 | 85,4 |

Un nuage de points représentant la série statistique $(x_i\,;y_i)$ est donné sur le graphique situé **sur le document réponse à rendre avec la copie**.

1. a. À l'aide de la calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire *r* de la série statistique $(x_i\,;y_i)$. On arrondira *r* au millième.

   b. Expliquer pourquoi le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

2. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite de régression de *y* en *x* sous la forme $y = ax + b$, où $a$ et $b$ seront arrondis au centième.

3. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite *D* d'équation *y* = 0,1 *x* + 84,2.

   Cette droite est tracée sur le graphique situé sur **le document réponse à rendre avec la copie**.

   a. Avec la précision permise par le graphique, déterminer l'espérance de vie des femmes nées en France en 2018 prévue par ce modèle d'ajustement. On laissera les traits de construction apparents.

   b. On considère la proposition suivante :

      P : « L'espérance de vie des femmes nées après 2006 en France restera inférieure ou égale à 86 ans. ».

   Selon ce modèle, la proposition P est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

## PARTIE B : Avec une fonction logistique

Dans cette partie, on décide de modéliser l'espérance de vie à la naissance des femmes en France par la fonction $g$ définie sur $[0; 30]$ par : $g(x) = \frac{85{,}5}{1+e^{-0{,}2x-4}}$

Plus précisément, $g(x)$ donne donc une estimation de l'espérance de vie à la naissance des femmes en France, mesurée en année, pour l'année de rang $x$, le rang $x$ étant mesuré à partir de l'année 2006.

Par exemple, $g(1)$ est une estimation de l'espérance de vie des femmes nées en France en 2007 c'est-à-dire l'année de rang 1.

1. On admet que le fonction $g$ est dérivable et on désigne par $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$.

   À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu : $g'(x) = \frac{17{,}1e^{-0{,}2x-4}}{(1+e^{-0{,}2x-4})^2}$

   a. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0; 30]$.

   b. En déduire le sens de variation de $g$ sur $[0; 30]$.

   c. Pour des femmes nées entre 2006 et 2036, l'espérance de vie à la naissance en France peut-elle atteindre 86 ans ?

2. a. Compléter le tableau de valeurs sur **le document réponse à rendre avec la copie** dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à $10^{-1}$ près.

   b. Tracer l'allure de la courbe $C$ représentant la fonction $g$ dans le graphique **du document réponse à rendre avec la copie**.

## PARTIE C : Critique des modèles

Étudier la pertinence des deux modèles proposés dans les parties A et B.

Argumenter la réponse.

**EXERCICE 2 (11 points)**

Un éleveur possède 80 vaches laitières réparties en deux races distinctes :

- 60 Prim'Holstein
- 20 Abondance.

Ces vaches sont susceptibles de contracter une maladie qui affecte la production de lait : 3 % des vaches Prim'Holstein et 7 % des vaches Abondance sont touchées par cette maladie.

Lors d'un contrôle vétérinaire concernant cette maladie, une vache est choisie au hasard dans l'élevage.

On note :

- $A$ l'événement « la vache est d'origine Abondance » ;
- $M$ l'événement « la vache a contracté la maladie ».

On rappelle que si $A$ et $B$ sont deux événements, $\bar{A}$ désigne l'événement contraire de $A$, $P(A)$ désigne la probabilité de l'événement $A$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$.

**Partie A : probabilités conditionnelles**

1. a. Justifier que la probabilité de choisir une vache Prim'Holstein est 0,75.
   b. En déduire $P(A)$.
   c. Donner sans justification la valeur des probabilités $P_{\bar{A}}(M)$ et $P_A(M)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.
3. a. Décrire, dans le contexte de l'énoncé, l'événement $A \cap M$ par une phrase.
   b. Calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité que la vache prélevée ait contracté la maladie est 0,04.
5. Les services vétérinaires ont indiqué à l'éleveur qu'une de ses vaches a contracté la maladie.
   L'éleveur déclare : « Il y a plus d'une chance sur deux qu'elle soit de race Abondance ».
   A-t-il raison ? Justifier la réponse.

**Partie B : Probabilités continues**

On appelle lactation, la période au cours de laquelle une vache produit du lait après la naissance d'un veau. L'éleveur étudie la quantité de lait produit pendant cette période pour chacune de ses vaches.

On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque vache prélevée au hasard dans le troupeau, associe cette quantité de lait en kg. On suppose que la variable $X$ suit une loi normale d'espérance $9300$ et d'écart type 800.

*Lorsque cela est nécessaire, on donnera les résultats sous forme décimale arrondis au centième.*

1. Donner, en kg, la quantité moyenne de lait produit par une vache au cours d'une lactation.
2. Donner la probabilité, qu'au cours d'une lactation, une vache produise une quantité de lait comprise entre 8 500 et 10 100 kg.
3. Une vache est réformée (elle ne peut plus faire partie du troupeau) lorsque sa production descend en-dessous de 7 800 kg au cours d'une lactation.

   Calculer, sous forme de pourcentage, la proportion de vaches qui pourraient être réformées dans le troupeau.

**Partie C : Mathématiques financières**

L'éleveur souhaite investir dans un robot pour automatiser la traite de ses vaches. Pour cela il doit souscrire auprès d'une banque un crédit d'un montant de 150 000 € remboursable en 10 annuités constantes au taux annuel de 3,5 %.

On rappelle la formule permettant de calculer le montant d'une annuité constante : $a = C \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

où $C$ désigne le capital emprunté, $t$ désigne le taux annuel et $n$ désigne le nombre d'annuités.

1. L'éleveur souhaite rembourser 19 000 € au maximum par an. Les conditions financières fixées par la banque permettent-elles de respecter cette contrainte ?

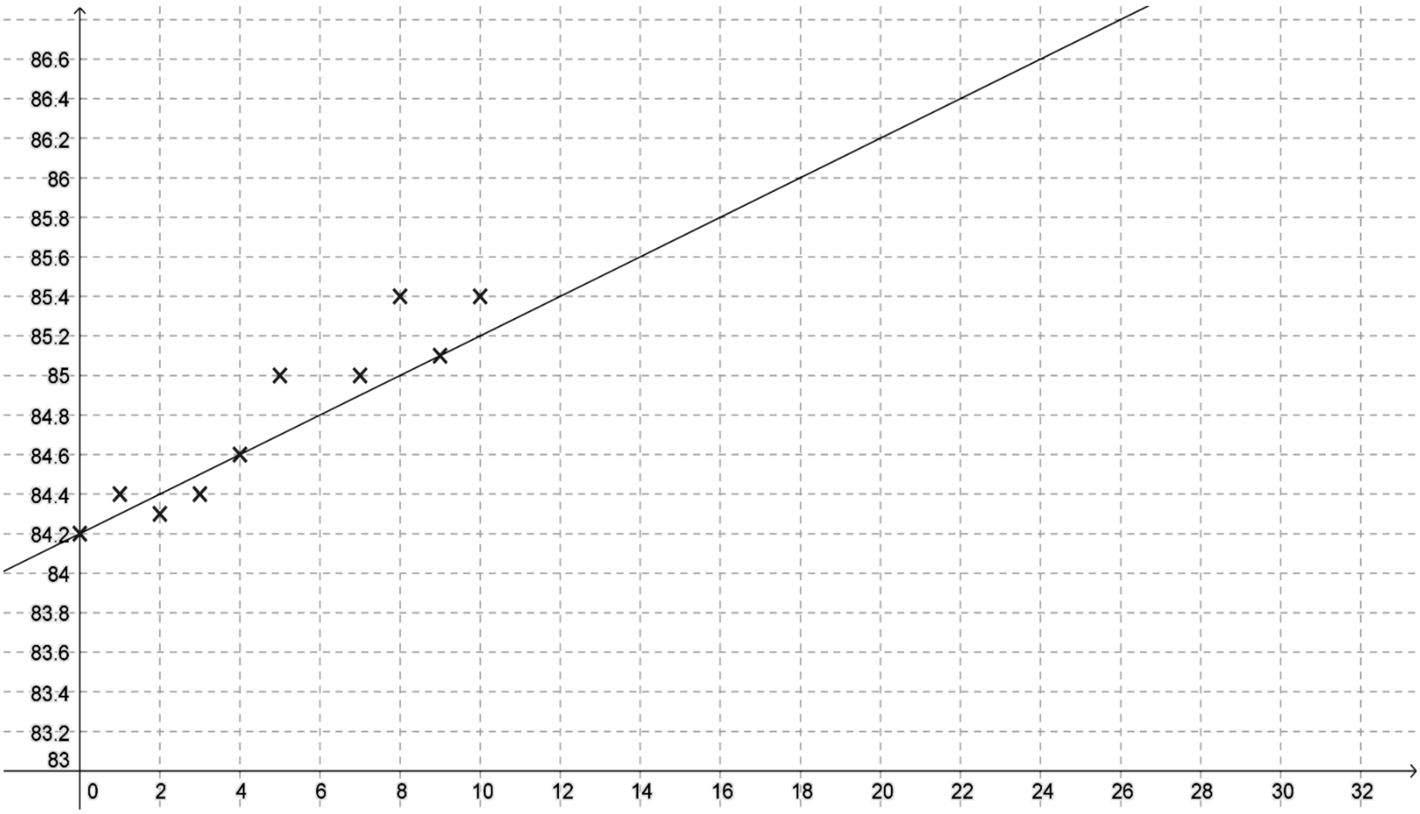
2. Quel est le coût total du crédit ?

# Document réponse des exercices 1 et 2 à rendre avec la copie

## Exercice 1 B 2.a

| $x$ | 0 | 5 | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 84,0 | | | | |

## Exercice 1 A 3.a et Exercice 2 B 2.b




N°