BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

COMPTABILITÉ ET GESTION

# MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

SESSION 2023

Durée : 2 heures

Coefficient : 3

**Matériel autorisé :**

- L’usage de calculatrice, avec mode examen actif est autorisé.
- L’usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l’appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu’il est complet.

Le sujet comporte 5 pages, numérotées de 1/5 à 5/5.

**Exercice 1** (10 points)
*Les différentes parties de l'exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

Natacha poursuit ses études à Rennes. Elle utilise trois moyens de transports différents pour se rendre à l'université : le bus, le vélo et le métro.
Depuis le début de ses études, elle constate que 40 % de ses trajets se font en bus, 25 % en vélo et le reste en métro.

Par ailleurs, elle arrive à l'heure :
- 8 fois sur 10 lorsqu'elle prend le bus,
- dans 70 % des cas lorsqu'elle prend le vélo,
- dans 85 % des cas lorsqu'elle prend le métro.

On choisit au hasard un jour au cours duquel Natacha se rend à l'université.

On notera :
$B$ l'événement : « Natacha prend le bus » ;
$V$ l'événement : « Natacha part en vélo » ;
$M$ l'événement : « Natacha prend le métro » ;
$H$ l'événement : « Natacha arrive à l'heure à la université ».

On notera $\overline{H}$ l'événement contraire de l'événement $H$.

**Partie A :**

1. Construire un arbre de probabilité illustrant cette situation.

2. Calculer la probabilité qu'elle ait pris le vélo et arrive à l'heure à l'université.

3. Démontrer que $p(H) = 0{,}7925$.

4. Natacha est arrivée en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait pris le bus ? Arrondir à $0{,}001$ près.

**Partie B :**

Natacha décide d'acheter une voiture. Elle en a trouvé une au prix de 6 490 euros.
Elle dispose d'un apport de 1 990 euros pour cet achat.

1. **a.** Quel montant doit-elle emprunter ?
   **b.** Quel pourcentage du prix de la voiture représente le montant emprunté ? Arrondir à $0{,}01$ %.

2. Pour cet emprunt, la banque lui propose un prêt remboursable sur 4 ans par annuité constante au taux annuel de $2{,}5\%$ .
   Vérifier que Natacha devra rembourser $1196{,}18$ € par an.

*On rappelle que pour calculer une annuité constante, on a la formule :* $a = V_0 \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$
*où* $V_0$ *est le montant emprunté,* $t$ *le taux annuel et* $n$ *le nombre d'annuités.*

**3.** On a construit le tableau d'amortissement du prêt contracté par Natacha.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | période | dette en début de période | intérêts | amortissement | annuité | dette en fin de période |
| 2 | 1 | | 112,5 | | 1196,18 | 3416,32 |
| 3 | 2 | | | | 1196,18 | |
| 4 | 3 | | | | 1196,18 | |
| 5 | 4 | | | | 1196,18 | |
| 6 | | | | | | |

**a.** Quelles sont les valeurs des cellules B2 et F5.
**b.** Quelle formule a été saisie en cellule C2 et étirée vers le bas pour compléter la colonne C des intérêts ?
**c.** Calculer la valeur de la cellule D2.
**d.** Quel est le coût total du crédit ?

## Partie C :

On estime que la probabilité qu'un étudiant français arrive en retard à l'université est de 0,2.

L'ensemble des universités françaises interrogent les étudiants concernant leur ponctualité.

Chacune choisit alors au hasard un échantillon de 150 étudiants. Le nombre d'étudiants étant assez important, on assimile cette expérience à un tirage avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 150 étudiants, associe le nombre d'étudiants qui arrivent en retard à l'université.

**1.** Justifier que $X$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

**2.** Quelle est la probabilité d'avoir exactement $35$ étudiants en retard ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

**3.** **a.** Calculer $p(X \leq 30)$. Arrondir le résultat à 0,001 près.
**b.** Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

**4.** Pour tout échantillon de 150 étudiants, combien d'étudiants en moyenne arriveront avant le début des cours ?

**Exercice 2** (10 points)
*Les différentes parties de l'exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

**Partie A :**

Le tableau suivant donne le nombre de visiteurs depuis 2016 d'un parc animalier :

| Année | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de visiteurs en millions | 1,35 | 1,44 | 1,54 | 1,60 |

1. Calculer le taux d'évolution global entre 2016 et 2019. Arrondir à 0,01 %.

2. Vérifier par le calcul que le taux d'évolution annuel moyen entre 2016 et 2019 est d'environ $5{,}83\ \%$.

3. On a constaté que 1,2 million de personnes ont visité le parc en 2020. Retrouve-t-on entre 2019 et 2020, l'évolution annuelle moyenne constatée à la question 2 ?

**Partie B :**

Le nombre de naissances dans le parc animalier depuis 2017 est donné dans le tableau ci-dessous :

| Année | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Nombre de naissances : $y_i$ | 530 | 645 | 905 | 1100 | 1695 |

Le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$, arrondi à 0,001 près, est de 0,958.

On effectue le changement de variable $z_i = \ln y_i$.
On obtient alors le tableau incomplet ci-dessous :

| Année | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Nombre de naissances : $y_i$ | 530 | 645 | 905 | 1100 | 1695 |
| $z_i = ln\ y_i$ | 6,273 | | 6,808 | 7,003 | |

1. Calculer les valeurs de $z_i$, qui permettent de compléter le tableau ci-dessus pour les années 2018 et 2021. Arrondir les résultats à 0,001 près.

2. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire, arrondi à 0,001 près, de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$.
   **b**. Comparer les coefficients de corrélation linéaire des séries $(x_i\ ;\ y_i)$ et $(x_i\ ;\ z_i)$ et préciser pour quelle série un ajustement affine est-il le plus pertinent.

3. Déterminer l'équation de la droite de régression de $z$ en $x$, par la méthode des moindres carrées, sous la forme $z = ax + b$, où les coefficients $a$ et $b$ seront arrondis à 0,001 près.

4. On décide d'approcher ce nuage de points par la droite d'équation :
$$z = 0{,}29x + 6{,}23$$
Calculer le nombre de naissances envisageables en 2023 selon ce modèle d'évolution.

**<u>Partie C</u>** :

En 2017, il y avait besoin de 832 tonnes de nourriture pour alimenter l'ensemble des animaux du parc animalier.

On modélise l'évolution de la quantité de nourriture nécessaire chaque année par une suite $(u_n)$ où $u_n$ est le nombre de tonnes de nourriture nécessaire pour l'année $2017 + n$.
On a ainsi : $u_0 = 832$.
On suppose que la quantité de nourriture nécessaire augmente chaque année de 1,25 %.

1. Calculer $u_1$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

2. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ? Préciser sa raison.

3. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

Selon ce modèle :

4. Quel serait la quantité de nourriture nécessaire en 2023 ? Arrondir à 0,01 près.

5. À partir de quelle année peut-on envisager une quantité de nourriture supérieure à 1000 tonnes par an ?