BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2023

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

L’usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L’usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu’il soit complet.

Le sujet comporte 8 pages, numérotées de 1/8 à 8/8.

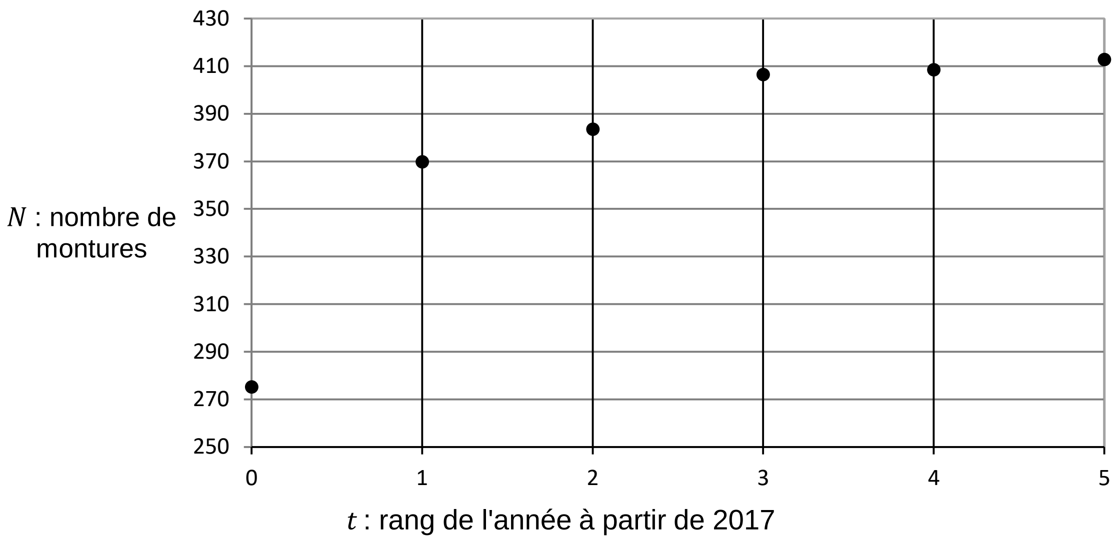
EXERCICE 1 (10 points)

On s'intéresse à une entreprise qui commercialise des montures de lunettes.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A – Étude d'une série statistique.

Le graphique ci-dessous représente l'évolution des ventes d'un modèle de monture de lunettes depuis l'année 2017.



1. Expliquer pourquoi un ajustement affine de N en t n'est pas pertinent.

2. On effectue le changement de variable $z = \ln(415 - N)$.
On obtient alors le tableau suivant :

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
t	0	1	2	3	4	5
z	4,94	3,81	3,45	2,14	1,86	0,77

a. À l'aide de la calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t\,;\,z)$. Arrondir à 10^{-3}.

b. Un ajustement affine de z en t est-il pertinent ? Justifier.

3. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite de régression linéaire de z en t, selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$.
Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-2}.

4. En déduire une expression de N à l'aide de t sous la forme :

$$N = 415 - Ce^{-0,8t} ,$$

où C est une constante que l'on déterminera, à l'unité près.

5. On suppose que l'évolution constatée se poursuit.
Quel sera le nombre de montures vendues en 2023 ?

Partie B – Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 5y' + 4y = 1660 ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : 5y' + 4y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$

2. Soit c un nombre réel. On considère la fonction constante g, définie par $g(t) = c$.
Déterminer c pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f , solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie la condition initiale $f(0) = 290$.

Partie C – Étude d'une fonction.

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) \;=\; 415 - 125\mathrm{e}^{-0{,}8t}\ .$$

On admet que cette fonction modélise l'évolution du nombre de montures vendues en fonction du temps :

t désigne le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2017.

$f(t)$ désigne le nombre de montures vendues.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants. Ces résultats sont admis et peuvent être utilisés dans les questions suivantes.

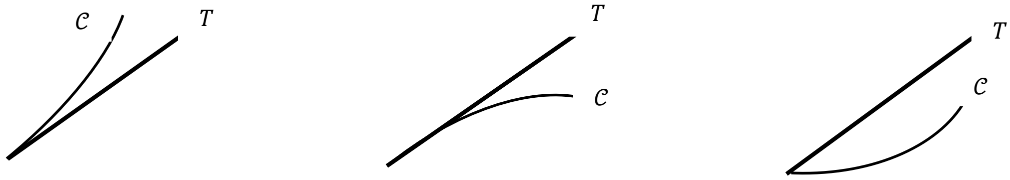
1	dérivée$\left(415 - 125\mathrm{e}^{-0.8t}\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{100\,e^{\frac{-4}{5}t}}$
2	intégrale$\left(415 - 125\mathrm{e}^{-0.8t}, t\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{\frac{625}{4}\,e^{\frac{-4}{5}t} + 415\,t + c_1}$
3	Limite$\left(415 - 125\,\mathrm{e}^{-0.8t}, \infty\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{415}$
4	PolynômeTaylor$\left(415 - 125\,\mathrm{e}^{-0.8t}, t, 0, 2\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{290 + 100\,t - 40\,t^2}$

1. On sait que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.
Donner une équation de cette asymptote.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Indiquer, sans justifier, laquelle des trois situations ci-dessous représente correctement la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T au voisinage de zéro.



Situation 1	Situation 2	Situation 3

Partie D – Étude d'une suite.

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 3000$, et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 500.$$

La suite (u_n) représente l'évolution du nombre de clients de l'entreprise.
Ainsi, u_n correspond au nombre de clients durant l'année 2017+n.

1. Vérifier que le nombre de clients lors de l'année 2018 est égal à 3200.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 5000$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}9$.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, le terme v_n en fonction de n.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 5000 - 2000 \times 0{,}9^n .$$

5. Déterminer le nombre de clients lors de l'année 2023.

6. On considère l'algorithme suivant :

```
n ← 1
u ← 3000
Tant que u ≤ 4000
         n ← n+1
         u ← 0,9*u +500
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de la variable `n` après l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 2 (10 points)

Une usine fabrique des verres ophtalmiques à partir de verres semi-finis.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Parie A. Probabilités conditionnelles.

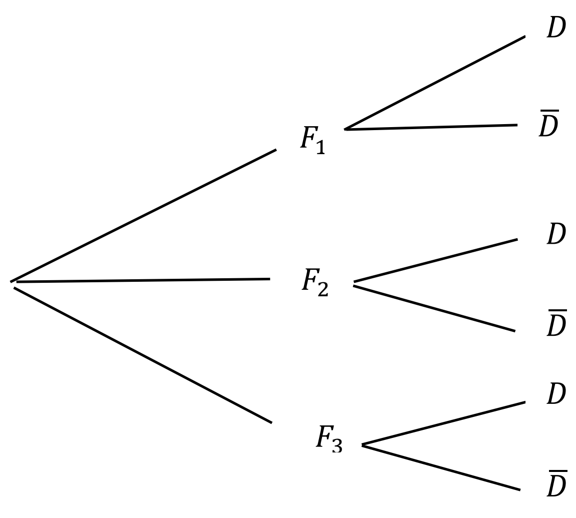
L'usine se procure des verres semi-finis auprès de trois fournisseurs différents :

- $30\ \%$ des verres semi-finis proviennent d'un premier fournisseur.
  ➔ Parmi eux, 3% sont défectueux.
- $60\ \%$ des verres semi-finis proviennent d'un deuxième fournisseur.
  ➔ Parmi eux, $4\ \%$ sont défectueux.
- $10\ \%$ des verres semi-finis proviennent d'un troisième fournisseur.
  ➔ Parmi eux, $2\ \%$ sont défectueux.

On prélève un verre semi-fini au hasard. On considère les évènements suivants :

F_1 : « le verre semi-fini provient du premier fournisseur »,
F_2 : « le verre semi-fini provient du deuxième fournisseur »,
F_3 : « le verre semi-fini provient du troisième fournisseur »,
D : « le verre semi-fini est défectueux ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Calculer la probabilité $P(F_1 \cap D)$.

3. Montrer que la probabilité que le verre semi-fini soit défectueux est égale à $0{,}035$.

4. On sait que le verre semi-fini est défectueux.
Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Partie B. Loi binomiale et loi normale.

On estime que $3{,}5\%$ des verres semi-finis du stock de l'usine sont défectueux.

On prélève un échantillon aléatoire de 200 verres semi-finis dans le stock de l'usine.

On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de verres semi-finis défectueux au sein de l'échantillon.

1. a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner ses paramètres.

b. Calculer la probabilité $P(6 \leq X \leq 10)$.

2. On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X par une loi normale d'espérance 7 et l'écart type $2{,}599$.

a. Justifier la valeur de ces paramètres.

b. On considère Y une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 7 et d'écart type $2{,}6$.

Calculer $P(5{,}5 \leq Y \leq 10{,}5)$.
Interpréter dans le contexte.

Partie C. Loi exponentielle.

On s'intéresse au standard téléphonique de l'usine.
On considère T la variable aléatoire qui, à chaque appel au standard, associe le temps d'attente, en minutes.
On admet que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

On rappelle les formules suivantes :

Loi exponentielle	
$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$E(T) = \frac{1}{\lambda}$

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.
Interpréter dans le contexte**.**

2. On considère un appel au standard, choisi au hasard.
Déterminer la probabilité que le temps d'attente correspondant à cet appel soit compris entre 2 et 4 minutes.

Partie D. Estimation

L'usine souhaite estimer la proportion p de clients satisfaits d'un nouveau verre.

Sur un échantillon de 100 clients choisis au hasard, 80 d'entre eux ont déclaré être satisfaits.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p.

2. Donner une estimation de p par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance de $90\ \%$.
On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion avec un coefficient de confiance de 90%
$\left[f - 1{,}65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$

3. Déterminer les entiers naturels n vérifiant l'inégalité : $1{,}65\sqrt{\frac{0{,}16}{n}} \leq 0{,}03$.

Interpréter le résultat dans le contexte.