BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2012

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.
(Circulaire n° 99 – 186 du 16/11/1999.)

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

EXERCICE 1 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'équations différentielles

1° On désigne par $x(t)$ la quantité de collyre antiallergique, exprimée en dizaines de microlitres, présente dans le cul-de-sac conjonctival à l'instant t. On suppose que la fonction x, de la variable réelle t, est définie et dérivable sur l'intervalle [0, 5] et vérifie l'équation différentielle (E_1) :

$$x'(t) + 2\,x(t) = 0$$

où x' désigne la fonction dérivée de la fonction x.

a) Déterminer les solutions définies sur [0, 5] de l'équation différentielle (E_1).

b) La quantité de collyre antiallergique instillée dans le cul-de-sac conjonctival à l'instant initial est $x(0) = 5$.
Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 5$.

2° On désigne par $y(t)$ la quantité de collyre antiallergique pénétrant dans le tissu conjonctival à l'instant t. On suppose que la fonction y, de la variable réelle t, est définie et dérivable sur l'intervalle [0, 5] et vérifie l'équation différentielle (E_2) :

$$y'(t) + y(t) = 10\,\mathrm{e}^{-2t}$$

où y' désigne la fonction dérivée de la fonction y.

a) Déterminer les solutions définies sur [0, 5] de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'(t) + y(t) = 0.$$

b) Soit h la fonction définie sur [0, 5] par $h(t) = -10\,\mathrm{e}^{-2t}$.
Démontrer que la fonction h est une solution de l'équation différentielle (E_2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2).

d) Déterminer la solution particulière g de l'équation différentielle (E_2) qui vérifie la condition initiale $g(0) = 0$.

B. Étude de fonctions et tracé d'une courbe

1° Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0, 5] par $f(t) = 5\,e^{-2t}$ et g la fonction définie sur l'intervalle [0, 5] par $g(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})$.
Justifier, selon les valeurs de t, les signes de $f'(t)$ et de $g'(t)$ apparaissant dans le tableau de variation suivant.
On ne demande pas de justifier les différentes valeurs numériques données dans ce tableau.

t	0		$\ln 2$		5
$f'(t)$	-10	$-$	$-2{,}5$	$-$	$-10\,e^{-10}$
$f(t)$	5	$\searrow$		$\searrow$	$5\,e^{-10}$
$g(t)$	0	$\nearrow$	$2{,}5$	$\searrow$	$10(e^{-5} - e^{-10})$
$g'(t)$	10	$+$	0	$-$	$10(-e^{-5} + 2e^{-10})$

2° Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, d'unité graphique 2 cm.
On considère la courbe C dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 5].$$

Représenter, à l'aide du tableau de variation précédent, la courbe C dans le repère défini ci-dessus.
La courbe C illustre le transport médicamenteux.

3° Préciser les tangentes à la courbe C aux points obtenus pour $t = 0$ et pour $t = 5$.
Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou non aboutie sera prise en compte.

C. Calcul intégral

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, de l'intégrale :

$$I = \int_0^5 -10(e^{-2t} - e^{-t})\,dt.$$

Cette intégrale correspond à la quantité de collyre antiallergique pénétrant dans le tissu entre les instants $t = 0$ et $t = 5$.

EXERCICE 2 (10 points)

Une entreprise fabrique en grande série des pièces de trois modèles différents, pour la lunetterie. Dans chaque partie, on étudie un modèle différent.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Défaut(s) des pièces du premier modèle

Une pièce du premier modèle peut présenter deux types de défauts : un défaut de longueur et un défaut d'épaisseur.
On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée. On note :
L l'événement : « la pièce présente le défaut de longueur » ;
E l'événement : « la pièce présente le défaut d'épaisseur ».
On admet que :
– la probabilité que la pièce prélevée présente le défaut de longueur est $P(L) = 0{,}04$;
– la probabilité que la pièce prélevée présente le défaut d'épaisseur est $P(E) = 0{,}07$;
– la probabilité que la pièce prélevée présente ces deux défauts est 0,02.

1° *Les questions a), b), c) et d) suivantes sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse enlève 0,25 point. Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total est négatif, la note pour cette question 1° est ramenée à zéro.

a) La probabilité que la pièce prélevée possède au moins un défaut est :

0,11	0,98	0,09

b) La probabilité que la pièce prélevée possède un seul défaut est :

0,09	0,07	0,03

c)

Les événements L et E sont indépendants.	Les événements L et E sont incompatibles.	Les événements L et E ne sont ni indépendants ni incompatibles.

d) On prélève maintenant un pièce au hasard parmi toutes celles présentant le défaut de longueur. La probabilité que cette pièce présente également le défaut d'épaisseur est :

0,07	0,5	$\frac{2}{7}$

2° On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces du premier modèle dans la production. La production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces présentant le défaut de longueur.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) Calculer la probabilité qu'un tel prélèvement comporte exactement trois pièces présentant le défaut de longueur. Arrondir à 10^{-3}.

B. Rayon des pièces du deuxième modèle

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Dans la production d'une journée, on prélève au hasard une pièce du deuxième modèle.
On désigne par R la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée, associe son rayon exprimé en mm.
On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type 0,75.

1° Calculer la probabilité que la pièce prélevée ait un rayon inférieur à 16 mm.

2° Calculer la probabilité que la pièce prélevée ait un rayon compris entre 13,5 et 16,5 mm.

C. Masses des pièces du troisième modèle
On étudie dans cette partie la masse des pièces du troisième modèle. On désire construire un test unilatéral pour décider si, au seuil de 5%, la masse moyenne des pièces fabriquées le 7 mars 2012 est ou n'est pas inférieure à 20 g.

1° On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 pièces dans la production du 7 mars 2012. Sur cet échantillon, on obtient une masse moyenne $\overline{x} = 19{,}972$ g et un écart type $\sigma_e = 0{,}4979$.
Donner une estimation ponctuelle de l'écart type σ des masses des pièces du troisième modèle dans la production du 7 mars 2012 (arrondir à 10^{-3}).

2° On note Y la variable aléatoire qui, à toute pièce du troisième modèle prélevée au hasard dans la production du 7 mars 2012, associe sa masse exprimée en grammes. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,5.
On désigne par $\overline{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 pièces du troisième modèle prélevé au hasard et avec remise dans la production du 7 mars 2012, associe la moyenne des masses des pièces de cet échantillon, exprimées en grammes.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 20$.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu < 20$.
Le seuil de signification est fixé à 0,05.

a) Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale de moyenne 20 et d'écart type 0,05. Déterminer alors le nombre réel positif h tel que :
$P(\overline{Y} \geq 20 - h) = 0{,}95$ (arrondir h à 10^{-3}).
b) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
c) À l'aide des résultats de l'échantillon de la question C 1°, peut-on, au seuil de 5%, conclure que la masse moyenne des pièces du troisième modèle fabriquées le 7 mars 2012 est inférieure à 20 g ?

3° Aurait-on la même décision que précédemment, en fixant le seuil de signification du test à 1% ?
Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou non aboutie sera prise en compte.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS OPTICIEN-LUNETIER

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
e^t	e^t		
t^α $(\alpha \in \mathbb{C})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t) \quad \Big| \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $\quad P(X = k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} \quad$ où $\quad \mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

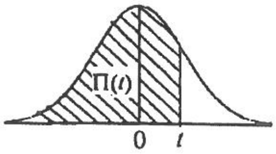
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$