BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2014

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.
(Circulaire n° 99 – 186 du 16/11/1999.)

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

EXERCICE 1 (10 points)

La rétinite pigmentaire est une maladie génétique caractérisée par la dégénérescence des cellules en cônes et en bâtonnets responsables de la vision. Afin de freiner l'évolution de cette maladie, deux traitements sont possibles.
Dans cet exercice, on étudie, pour ces deux traitements, l'évolution de la quantité des principes actifs présents dans le sang en fonction du temps.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Modèle discret du premier traitement : étude de suites

Le premier traitement consiste à injecter par intraveineuse un médicament permettant une meilleure vascularisation des vaisseaux sanguins de la rétine.
On injecte dans le sang à l'instant $t = 0$, une dose de 1,8 unités du médicament. On suppose que ce médicament diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé. Au bout de chaque heure après l'injection, sa quantité a diminué de 30 % par rapport à la valeur qu'elle avait au début de cette heure.
Dans le but d'atteindre une quantité de médicament présente dans le sang supérieure à 5 unités, on décide de réinjecter une dose de 1,8 unités toutes les heures.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, exprimée en unités, présente dans le sang au bout de n heures.

1° Justifier que $u_0 = 1,8$ et que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,7\, u_n + 1,8$.

2° On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 6$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on donnera le premier terme v_0.

3° Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 4,2 \times (0,7)^n$.

4° a) Déterminer la limite de la suite (u_n).

b) Interpréter le résultat obtenu par rapport au but à atteindre.

B. Modèle continu du second traitement : résolution d'une équation différentielle

Le second traitement consiste à faire absorber au malade par voie orale un médicament à base de palminate de vitamine A et d'oméga-3.
L'évolution, en fonction du temps (exprimé en heures), de la quantité de principe actif présente dans le sang après absorption (exprimée en mg) est modélisée par une fonction vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = 2,5\, e^{-0,5\,t},$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + y = 0.$$

2° Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = 5\, e^{-0,5\,t}$.
Vérifier que g est une solution de (E).

3° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

C. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = -5\,e^{-t} + 5\,e^{-0,5\,t}$.
On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b) Donner une interprétation graphique du résultat précédent.

2° a) Calculer $f'(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$ et vérifier que $f'(t)$ peut s'écrire sous la forme : $f'(t) = 2,5\,e^{-t}\,(2 - e^{0,5\,t})$.

b) Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3° Écrire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

4° a) Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression d'une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ce logiciel note $\%e^t$ l'expression e^t.

```
(%i1)  f(t):=-5*%e^(-t)+5*%e^(-0.5*t);
(%o1)  f(t):=(-5)%e^(-t) +5 %e^((-0.5)t)

(%i2)  integrate(f(t),t);
(%o2)  5 %e^(-t) -10.0 %e^(-0.5 t)
```

Justifier, à l'aide d'un calcul, l'expression fournie par le logiciel.

b) En déduire la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-2}, de l'intégrale :
$I = \int_0^6 (-5\,e^{-t} + 5\,e^{-0,5\,t})\,dt$.

La valeur de cette intégrale représente la quantité de principe actif présente dans le sang entre les instants $t = 0$ et $t = 6$.

EXERCICE 2 (10 points)

Un fabriquant de lentilles souples, dites « hydrophiles », propose une nouvelle génération de lentilles en silicone d'hydrogel.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Événements indépendants

À l'issue de la fabrication, ces lentilles peuvent présenter deux types de défauts :
- un rayon de courbure défectueux ;
- une perméabilité à l'oxygène défectueuse.

On considère la production de lentilles au cours d'un mois donné.
On admet que, dans cette production, 3 % des lentilles présentent un rayon de courbure défectueux et 2 % présentent une perméabilité à l'oxygène défectueuse.
On prélève une lentille au hasard dans cette production.
On note A l 'événement : « la lentille prélevée présente un rayon de courbure défectueux ».
On note B l 'événement : « la lentille prélevée présente une perméabilité à l'oxygène défectueuse ».
On suppose que les événements A et B sont indépendants. On admet alors que les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants et les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Les questions 1°, 2°, 3° et 4° suivantes sont des questionnaires à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1° La probabilité $P(A \cap B)$ est :

0,006	0,0006	0,05

2° La probabilité $P(A \cup B)$ est :

0,0494	0,006	0,05

3° La probabilité $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ est :

0,9994	0,9506	0,9494

4° La probabilité que la lentille prélevée présente un seul des deux défauts est :

0,0488	0,05	0,0494

B. Loi binomiale, loi de Poisson

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

On considère un stock important de lentilles fabriquées par l'entreprise. Dans ce stock, on admet que 5 % des lentilles ne sont pas conformes aux normes de commercialisation.
On prélève au hasard 120 lentilles dans ce stock pour vérification de la conformité. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement au tirage avec remise de 120 lentilles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de lentilles de ce prélèvement non conformes aux normes de commercialisation.

1° a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
b) Calculer la probabilité qu'au moins une lentille de ce prélèvement soit non conforme aux normes de commercialisation.
2° On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson.
a) Justifier que le paramètre de cette loi de Poisson est $\lambda = 6$.
b) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.
Calculer $P(Y \leq 5)$.
c) Déduire de la question précédente une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait, dans un prélèvement, au moins six lentilles non conformes aux normes de commercialisation.

C. Loi normale
Dans cette partie, on s'intéresse à la densité des lentilles souples.
Une lentille est considérée conforme pour la densité lorsque celle-ci est comprise entre 0,88 et 1,12. Dans la production d'un mois, on prélève au hasard une lentille souple.
On désigne par Z la variable aléatoire qui, à chaque lentille prélevée, associe sa densité.
On admet que Z suit la loi normale de moyenne 1 et d'écart type 0,08.

Calculer, à l'aide de la table du formulaire ou d'une calculatrice, la probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans cette production soit conforme pour la densité. Donner le résultat approché arrondi à 10^{-3}.

D. Intervalle de confiance
Le fabriquant voudrait estimer la densité moyenne inconnue μ des lentilles de sa production annuelle.
On désigne par D la variable aléatoire qui, à toute lentille de cette production, associe sa densité. On admet que D suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 0{,}07$.
On prélève un échantillon aléatoire de 150 lentilles dans la production annuelle. Cette production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On désigne par $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 150 lentilles ainsi prélevé, associe la densité moyenne des lentilles de cet échantillon. On admet que $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{150}}$ avec $\sigma = 0{,}07$.

Pour l'échantillon prélevé, on constate que la densité moyenne des lentilles est $\overline{d} = 1{,}108$.

1° Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{d}$ de la moyenne inconnue μ au niveau de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.
2° On considère la phrase suivante : « on est sûr que la moyenne μ appartient à l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente ». Est-ce vrai ? Justifier.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS OPTICIEN-LUNETIER

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
e^t	e^t		
t^α $(\alpha \in \mathbb{C})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\mathrm{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\mathrm{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u\, u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X = k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ où $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

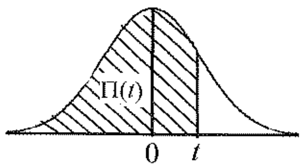
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$