# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
# SERVICES INFORMATIQUES
# AUX ORGANISATIONS

## SESSION 2013

## SUJET

## ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

**Sous épreuve E21 – Mathématiques**
**Épreuve obligatoire**

**Durée : 2 heures** **coefficient : 2**

***Calculatrice autorisée,*** *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.**

**Il comprend 5 pages numérotées de la page 1/5 à la page 5/5.**

## Exercice 1 (6 points)

Le directeur des ressources humaines (DRH) d'une mairie doit recruter une personne pour un travail concernant la circulation des voitures dans le centre ville.

### Partie A

Pour faire son choix, le DRH met en place trois critères de sélection concernant les connaissances en informatique, l'expérience dans le domaine concerné et le suivi d'un stage de formation spécifique.

La personne recrutée devra :

- avoir des connaissances informatiques et de l'expérience dans le domaine concerné ;
- ou ne pas avoir de connaissances informatiques mais avoir suivi un stage de formation spécifique ;
- ou ne pas avoir d'expérience dans le domaine concerné, mais avoir suivi un stage de formation spécifique.

On définit les trois variables booléennes $a$, $b$ et $c$ suivantes :

- $a = 1$ si la personne possède des connaissances informatiques, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si la personne possède de l'expérience dans le domaine concerné, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si la personne a suivi un stage de formation spécifique, $c = 0$ sinon.

1. Décrire la situation correspondant au produit $a\,b\,\overline{c}$.

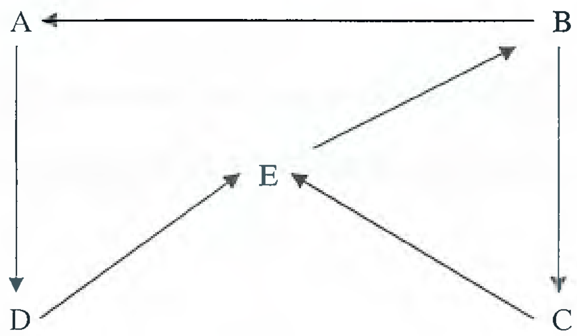
2. Définir l'expression booléenne $E$ correspondant aux critères de sélection du DRH.

3. À l'aide d'un diagramme de Karnaugh ou d'un calcul booléen, trouver une écriture simplifiée de l'expression booléenne $E$ sous la forme d'une somme de deux termes.

4. Écrire une phrase donnant les conditions de recrutement correspondant à la simplification précédente de l'expression booléenne $E$.

### Partie B

Le plan de circulation du centre ville peut être représenté par le graphe orienté suivant où les sommets A, B, C, D et E sont les carrefours et où les arcs indiquent les rues et leur sens de circulation.



1. Donner la matrice d'adjacence $M$ de ce graphe orienté en considérant les sommets A, B, C, D et E dans cet ordre.

2. On donne le carré de la matrice $M$ : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Interpréter les chiffres « 1 » de la deuxième ligne et donner les chemins correspondants.

3. Calculer la somme booléenne $M \oplus M^{[2]}$ et donner la signification des termes de cette somme.

## Exercice 2 (7 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la dépréciation d'un modèle d'ordinateur en fonction du temps écoulé, exprimé en trimestre, depuis sa mise sur le marché.
L'entreprise conceptrice de ce modèle souhaite déterminer l'évolution trimestrielle du prix de vente de cet ordinateur, exprimé en euro. On appelle $n$ le nombre de trimestres écoulés depuis la mise sur le marché de ce produit. Ainsi, à la mise sur le marché, on a $n=0$.
Deux modélisations ont été retenues par cette entreprise.

### Partie A : 1re modélisation

Le prix de vente initial à la mise sur le marché de ce modèle d'ordinateur est de 795 €. Chaque trimestre, le prix de vente de ce modèle diminue de 10 % en raison des progrès technologiques.
On note $(u_n)$ la suite telle que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne le prix de vente, exprimé en euro, de ce modèle d'ordinateur, $n$ trimestres après sa mise sur le marché.

1. Donner $u_0$, puis calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ et préciser sa raison.
3. En déduire que, pour tout entier $n$, on a : $u_n = 795 \times 0{,}9^n$.
4. À partir de combien de trimestres le prix de vente d'un tel ordinateur devient-il strictement inférieur à 300 € ?

### Partie B : 2e modélisation

Le prix de vente, exprimé en euro, de ce modèle d'ordinateur au bout de $n$ trimestres écoulés depuis sa mise sur le marché, noté $v_n$, est donné par : $v_n = 525\mathrm{e}^{-0{,}25n} + 270$.

1. Vérifier que le prix de vente de ce modèle d'ordinateur à sa mise sur le marché est de 795 €.
2. Déterminer le nombre minimal de trimestres écoulés depuis sa mise sur le marché à partir duquel le prix de vente de ce modèle d'ordinateur deviendra inférieur ou égal à 300 €.

### Partie C : comparaison des deux modèles

1. Déterminer les prix de vente, dans chacune des modélisations, 5 trimestres après la mise sur le marché du modèle d'ordinateur.
2. À long terme, laquelle des deux modélisations donne le prix de vente le plus bas ? Justifier la réponse.

## Exercice 3 (7 points)

Un jeu classique consiste à coder des messages. Pour cela, on utilise la correspondance entre les lettres de l'alphabet et un nombre entier $x$ compris entre 0 et 25.
Le tableau ci-dessous donne cette correspondance :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Le codage consiste à choisir une clé formée de deux nombres entiers $a$ et $b$ compris entre 0 et 25 et à remplacer une lettre par une autre selon le principe suivant :

- on lit sur le tableau le nombre $x$ correspondant à la lettre ;
- on calcule le reste $r$ de la division de $ax+b$ par 26 ;
- on lit sur le tableau la lettre correspondant au nombre $r$ qui est donc la lettre codée.

**Exemple :** avec la clé $(a;b)=(7;12)$, pour coder la lettre T, on calcule $7\times19+12=145$, puis le reste de la division euclidienne de 145 par 26, soit 15. La lettre codée est ainsi la lettre P.

**1.** Coder les lettres A, K et W avec la clé $(a;b)=(5;17)$.

**2.** Que se passe-t-il si on prend $a=0$ et $b=17$ ?

**3.** On considère un entier $x$ compris entre 0 et 25.

**a)** Donner, sans justification, les restes obtenus dans la division euclidienne de $13x+6$ par 26 pour $x$ compris entre 0 et 25.

**b)** Coder le mot PREMIER avec la clé $(13;6)$.

Commenter le résultat obtenu.

**4.** Un codage est dit acceptable lorsque deux lettres distinctes quelconques sont toujours codées différemment.

On admet que les clés $(a;b)$ donnant un codage acceptable sont celles pour lesquelles $a$ est un entier premier avec 26, quel que soit l'entier $b$ compris entre 0 et 25.

**a)** Donner la liste des nombres entiers compris entre 0 et 25 et premiers avec 26.

**b)** Déterminer le nombre de clés donnant un codage acceptable.

**5.** Le mot ABSURDE a été codé à l'aide d'une clé $(a;b)$ selon le principe décrit ci-dessus et l'on a obtenu VOZLGAT. Déterminer cette clé.