BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
SERVICES INFORMATIQUES
AUX ORGANISATIONS

Session 2014

SUJET

ÉPREUVE EF2 – MATHÉMATIQUES APPRONDIES

Sous épreuve EF2 – facultative

Durée : 2 heures

<u>Calculatrice autorisée</u>, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Il comprend 6 pages numérotées de la page 1/6 à la page 6/6.

La page 6/6 est une feuille annexe, à rendre avec la copie.

Exercice 1 (10 points)

Le centre de radiologie RadioPro souhaite confier à une entreprise la sauvegarde de fichiers de données dont la taille est comprise entre 1 Go et 4 Go.

Partie A

L'entreprise StockA propose un tarif à RadioPro modélisé par la fonction f définie pour tout x de l'intervalle $[1;4]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 6$$

où x est la taille du fichier, exprimée en Go, et $f(x)$ est le coût de stockage, exprimé en centimes d'euro.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe C_f est représentée en annexe.

1. a) D'après le graphique, quel semble être le coût maximum de stockage d'un fichier de données ?

b) Pour quelle taille de fichier ce maximum est-il atteint ?

2. Quel est le coût de stockage d'un fichier de données de taille 2 Go ?

Partie B

L'entreprise StockB propose un tarif à RadioPro modélisé par la fonction g définie pour tout x de l'intervalle $[1;4]$ par :

$$g(x) = -2x\ln(x) + 4x + 2$$

où x est la taille du fichier, exprimée en Go, et $g(x)$ est le coût de stockage, exprimé en centimes d'euro.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[1;4]$, la dérivée de g a pour expression :

$$g'(x) = 2(1 - \ln(x)).$$

2. Résoudre, dans l'intervalle $[1;4]$, l'inéquation : $1 - \ln(x) > 0$.

3. Établir le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[1;4]$.

Les valeurs seront arrondies au centième.

4. Compléter le tableau de valeurs de la fonction g qui figure en **annexe, à rendre avec la copie.**

Les résultats seront arrondis au centième.

5. Tracer sur le graphique de l'**annexe** la courbe C_g.

Partie C

Les tailles des fichiers à sauvegarder sont uniformément réparties dans l'intervalle $[1;4]$.
Pour choisir entre les deux propositions de tarif, le directeur du centre de radiologie décide de comparer les valeurs moyennes des fonctions f et g sur l'intervalle $[1;4]$.

1. Valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$.

a) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[1;4]$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 6x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$.

b) Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$.
Le résultat sera arrondi au dixième.

2. À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu le résultat suivant :

$$\frac{1}{3}\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x \approx 7{,}1.$$

Quel tarif le directeur doit-il choisir ?

Exercice 2 (10 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une communauté d'agglomération regroupe les communes d'Atout, de Boutan et de Codin. Le site internet de cette communauté d'agglomération, créé en 2006, connaît un succès grandissant.

Partie A

Les habitants des trois communes peuvent, via le site internet, s'abonner à la lettre mensuelle de la communauté d'agglomération.

Monsieur S., directeur des services informatiques, demande à l'administrateur du site de lui donner des éléments qui permettront de répartir le coût d'envoi des lettres mensuelles entre les différentes communes.

Pour l'année 2013, l'administrateur du site a pu établir que, parmi les habitants des trois communes qui se connectent au site :

- 45 % habitent la ville d'Atout ;
- 20 % habitent Boutan ;
- tous les autres habitent Codin ;
- 10 % de ceux qui habitent Atout s'abonnent à la lettre mensuelle ;
- 15 % de ceux qui habitent Boutan s'abonnent à la lettre mensuelle ;
- 5 % de ceux qui habitent Codin s'abonnent à la lettre mensuelle.

On choisit au hasard un internaute d'une des trois communes qui s'est connecté en 2013.
On note :

- A l'événement : « l'internaute habite Atout » ;
- B l'événement : « l'internaute habite Boutan » ;
- C l'événement : « l'internaute habite Codin » ;
- M l'événement : « l'internaute s'abonne à la lettre mensuelle ».

On pourra s'aider d'un arbre pondéré pour répondre aux questions.

1. a) En utilisant les données de l'énoncé, donner les valeurs des probabilités $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$, $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ et $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{M})$.

b) Déterminer la probabilité $P(\mathrm{C})$.

2. Quelle est la probabilité que l'internaute choisi habite Atout et s'abonne à la lettre mensuelle ?
On donnera le résultat exact sous forme décimale.

3. Quelle est la probabilité que l'internaute choisi s'abonne à la lettre mensuelle ?
On donnera le résultat exact sous forme décimale.

4. Sachant que l'internaute choisi s'abonne à la lettre mensuelle, quelle est la probabilité qu'il habite Atout ?
Le résultat sera arrondi au centième.

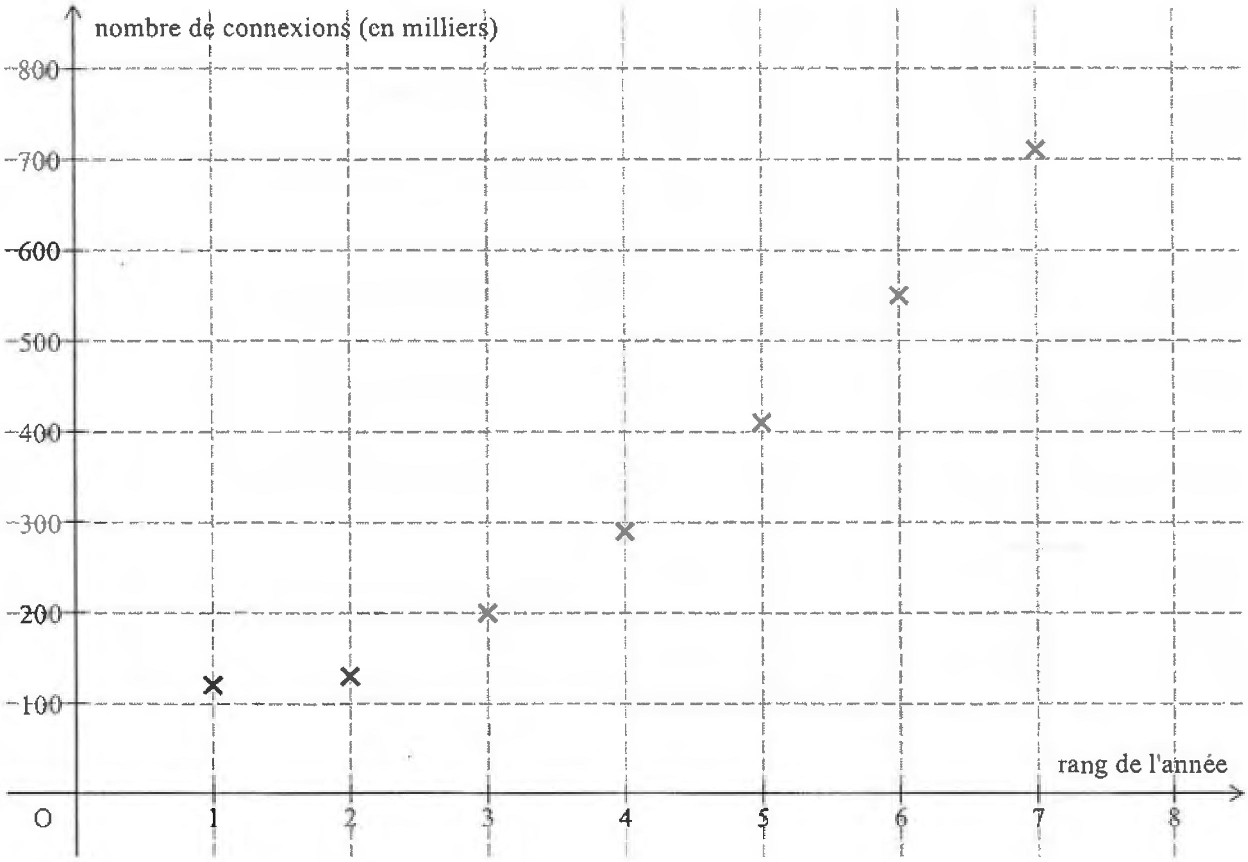
5. L'administrateur du site affirme à Monsieur S. que la commune d'Atout devra payer en 2013 plus de la moitié du coût de l'envoi des lettres mensuelles. A-t-il raison ?

Partie B

Afin d'adapter au mieux les capacités du serveur hébergeant le site internet, le directeur du service informatique, Monsieur S., a mené une étude sur la fréquentation du site. Il souhaite établir une prévision de fréquentation pour les prochaines années.
Le nombre de connexions à la page d'accueil du site pour les sept dernières années a été relevé dans le tableau ci-dessous.

Année		2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année	x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de connexions (en milliers)	y_i	120	130	200	290	410	550	710

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a représenté ci-après le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;y_i)$, pour i variant de 1 à 7.



D'après cette représentation graphique, il ne semble pas judicieux d'utiliser un ajustement affine pour approcher ce nuage de points.

1. On effectue le changement de variable $z_i = \ln(y_i)$, pour i compris entre 1 et 7.
   Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant.
   Les valeurs seront arrondies au centième.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	4,79						

2. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés.
   Les coefficients seront arrondis au centième.

3. En déduire qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $y = a\,e^{bx}$.
   Le nombre a sera arrondi à l'unité et le nombre b au centième.

4. Les spécificités techniques du serveur impliquent son remplacement lors de l'année au cours de laquelle le nombre de connexions dépasse deux millions.
   En admettant que la tendance observée pendant les sept dernières années va se poursuivre, Monsieur S. écrit dans un rapport à destination des élus de la communauté d'agglomération qu'il faudra prévoir de changer le serveur au cours de l'année 2017. A-t-il raison ?

Annexe exercice 1

À rendre avec la copie

Courbe représentative de la fonction f :

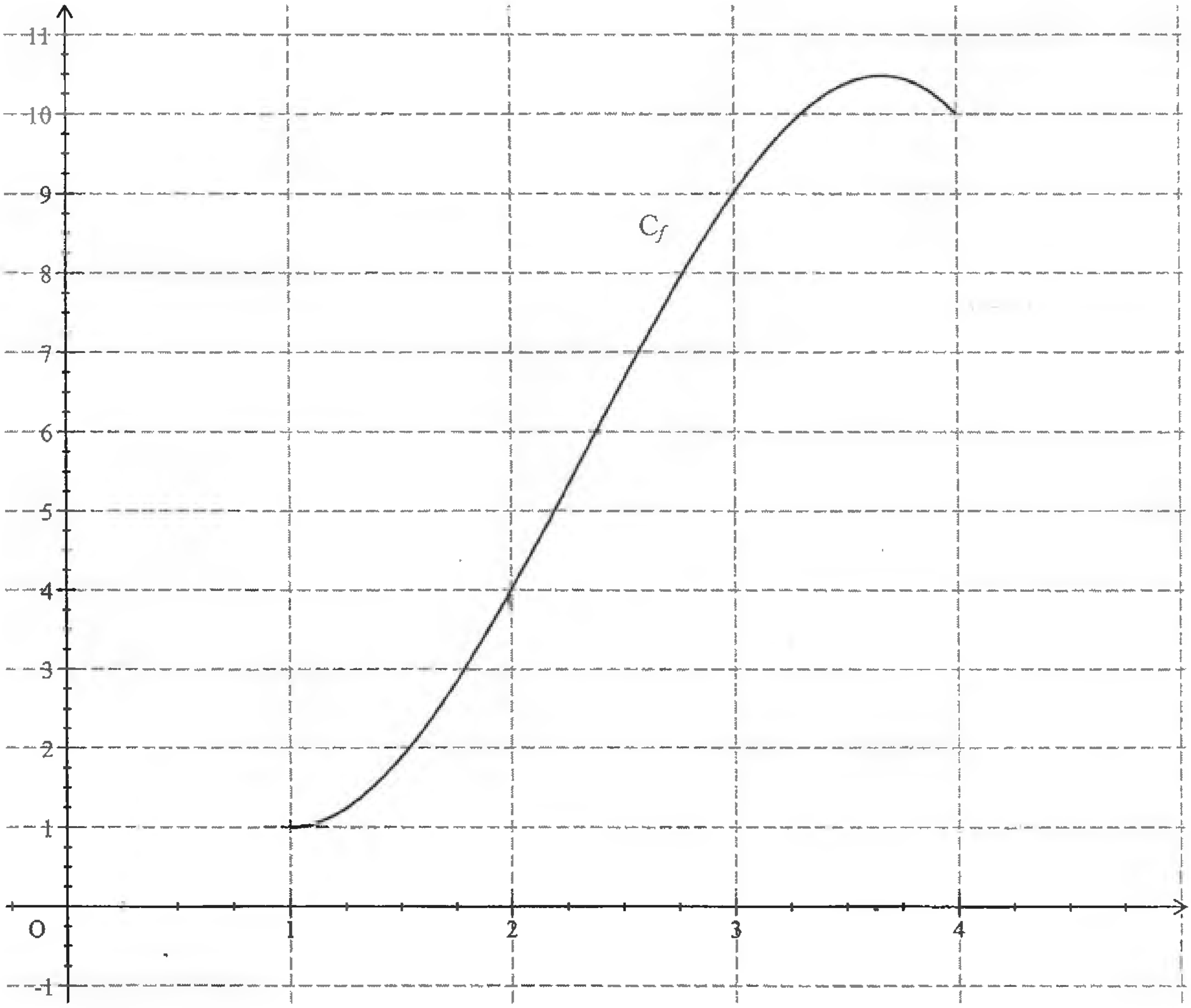


Tableau de **valeurs de la fonction g :**

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$g(x)$							