BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

SESSION 2016

SUJET

ÉPREUVE EF2 – MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Sous-épreuve EF2 – facultative

Durée : 2 heures

Seuls les points supérieurs à 10 sont pris en compte

Calculatrice autorisée, *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Il comprend 4 pages numérotées de la page 1 à la page 4.

Une feuille de papier millimétré est à fournir avec le sujet.

Exercice 1 (10 points)

Une banque observe durant 4 heures la plus-value d'un portefeuille d'actions très volatiles.
Cette plus-value, exprimée en milliers d'euro, est modélisée par :

$$f(t) = 0{,}1 \times (15 - t^2)\mathrm{e}^t$$

où t est exprimé en heure, et appartient à l'intervalle [0 ; 4].

On désigne par C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1. a) Démontrer que pour tout t de l'intervalle [0 ; 4], $f'(t) = 0{,}1 \times (-t+3)(t+5)\mathrm{e}^t$.
   b) Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle [0 ; 4].
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 4].

2. a) Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant les valeurs au millième.

t	0	1	2	3	3,5	4
$f(t)$						

   b) Tracer la courbe C_f dans le repère sur l'intervalle [0 ; 4].
   (Unités graphiques : 4 cm pour une unité en abscisses, 1 cm pour une unité en ordonnées.)

Partie B

1. Déterminer la plus-value après une heure.
2. À l'aide du graphique de la question **A-2.**, déterminer l'intervalle de temps durant lequel la plus-value est supérieure à 4500 € (on laissera les traits de construction).
3. Déterminer l'instant pour lequel la plus-value est maximale, puis donner la valeur de ce maximum. Justifier les réponses.
4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de temps la plus-value est négative.

Partie C

1. Vérifier que la fonction F définie pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 4] par :

$$F(t) = 0{,}1 \times (-t^2 + 2t + 13)\mathrm{e}^t$$

   est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

2. D'après le modèle, la valeur moyenne M de la plus-value pendant les trois premières heures s'exprime par : $M = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Calculer cette valeur moyenne, arrondie à l'euro.

Exercice 2 (10 points)

L'exercice est relatif à des jeux en ligne. Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un site web a mis en ligne un jeu début 2014. Le responsable du site étudie l'évolution du nombre d'internautes ayant joué à ce jeu chaque trimestre, durant sept trimestres consécutifs. Les nombres correspondants sont récapitulés dans le tableau suivant.

Trimestre	2e trim. 2014	3e trim. 2014	4e trim. 2014	1er trim. 2015	2e trim. 2015	3e trim. 2015	4e trim. 2015
Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de joueurs, en centaines : y_i	6	7,8	9,8	12	15,3	19,1	24
$z_i = \ln(y_i)$							

À partir de ces données, le responsable du site envisage deux modèles d'évolution.

1. Un modèle affine
Calculer le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série des sept valeurs (x_i, y_i).

2. Un modèle exponentiel

a) Pour tout entier i compris entre 1 et 7, on pose $z_i = \ln(y_i)$. Recopier et compléter le tableau précédent, en arrondissant les valeurs de z_i au centième.

b) Calculer le coefficient de corrélation r_2 de la série des sept valeurs (x_i, z_i), puis interpréter les deux coefficients de corrélation, relativement à la qualité des deux modèles envisagés.

3. Une estimation

a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de z en x, en arrondissant les résultats à la troisième décimale.

b) En déduire une estimation du nombre de joueurs au premier trimestre 2017, selon le modèle exponentiel. On arrondira ce nombre à la dizaine.

Partie B

Un groupe d'amis se connecte pour jouer à un jeu en réseau. La loi de la variable aléatoire D exprimant la durée d'une partie, en minute, est modélisée par la loi normale $\mathcal{N}(120 ; 20)$.

1. Déterminer la probabilité, arrondie au centième, que la partie dure entre 90 et 180 minutes.

2. Déterminer un réel h tel que $P(120 - h \leq D \leq 120 + h) = 0,683$. Donner l'arrondi de h à l'unité.

Partie C

Dans un jeu vidéo apparaît un monstre, dont la durée de vie T est une variable aléatoire. La loi de la variable T est exponentielle de paramètre λ (en min^{-1}).
Le jeu est programmé de telle sorte que la durée de vie moyenne soit égale à 10 minutes.

1. Justifier que la valeur du paramètre λ est égale à 0,1 min^{-1}.

2. Déterminer la probabilité, arrondie au centième, des événements suivants :
   - A : « le monstre est encore en vie après dix minutes de jeu » ;
   - B : « le monstre périt avant vingt minutes de jeu » ;
   - C : « le monstre est encore en vie à la dixième minute et périt avant la vingtième ».

3. Déterminer le nombre de minutes m tel que $P(T \leq m) = 0,5$.
   Ce nombre est appelé la durée de « demi-vie » du monstre lors d'une partie.