BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

SESSION 2017

SUJET

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Sous-épreuve E21 – Mathématiques

Épreuve obligatoire

Durée : 2 heures **coefficient : 2**

Calculatrice autorisée, *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Il comprend 4 pages numérotées de la page 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (11 points)

Cinq joueurs, notés A, B, C, D et E, jouent régulièrement à un jeu en ligne.
Chaque partie de ce jeu oppose deux adversaires.
Le tableau suivant donne, pour chacun des cinq joueurs, la liste des adversaires qu'il a déjà battus.

Le joueur	a déjà battu
A	B, D
B	C
C	B, D
D	E
E	D

Ainsi, par exemple, le joueur C a déjà battu les joueurs B et D.

1. Graphe orienté associé à la situation

a) En considérant le tableau précédent comme un tableau de successeurs, représenter la situation par un graphe orienté G, dans lequel un arc relie un sommet x à un sommet y si le joueur x a déjà battu le joueur y.

b) Écrire la matrice d'adjacence M du graphe G.

c) Recopier et compléter le tableau des **prédécesseurs** dans le graphe G.

Le joueur	**a déjà ....**
A	
B	
C	
D	
E	

d) Le graphe G contient-il un circuit ? Contient-il un chemin hamiltonien ? Justifier les réponses.

2. Dans cette question, on note $J=\{A, B, C, D, E\}$ l'ensemble des cinq joueurs.

On note $V(x\ ;\ y)$ le prédicat : « le joueur x a déjà battu le joueur y ».

Ainsi, la valeur $V(A\ ;\ B)$ est VRAI, et la valeur de $V(B\ ;\ A)$ est FAUX.

On définit trois prédicats :

P1 : $\forall x \in J, \exists y \in J, x \neq y$ et $V(x\ ;\ y)$

P2 : $\exists x \in J, \forall y \in J, x \neq y$ et $V(x\ ;\ y)$

P3 : $\exists y \in J, \forall x \in J, x \neq y$ et $V(x\ ;\ y)$

Associer à chaque prédicat P1, P2, P3, celle des trois phrases suivantes qui lui correspond parmi les phrases suivantes. Aucune justification n'est demandée.

- « Il existe un joueur qui a été battu par tous les autres joueurs ».
- « Tous les joueurs ont battu au moins un autre joueur ».
- « Il existe un joueur qui a battu tous les autres joueurs ».

3. Un joueur reçoit un bonus lorsqu'il vérifie l'un au moins des trois critères suivants :
   - le joueur a participé à 20 parties ou davantage, et il a affronté plusieurs adversaires différents ;
   - le joueur n'a pas affronté plusieurs adversaires différents, et il a obtenu strictement plus de victoires que de défaites ;
   - le joueur n'a pas obtenu strictement plus de victoires que de défaites, et il a participé à 20 parties ou davantage.

   On définit les variables booléennes a, b, c de la façon suivante :
   - $a=1$ si le joueur a participé à 20 parties ou davantage ; $a=0$ sinon ;
   - $b=1$ si le joueur a affronté plusieurs adversaires différents ; $b=0$ sinon ;
   - $c=1$ si le joueur a obtenu strictement plus de victoires que de défaites ; $c=0$ sinon.

   a) Écrire une expression booléenne F traduisant les conditions permettant à un joueur d'obtenir le bonus.
   b) À l'aide d'un tableau de Karnaugh ou d'un calcul booléen, déterminer une écriture simplifiée de F sous forme d'une somme de deux termes.
   c) En déduire une formulation simplifiée des critères permettant à un joueur d'obtenir le bonus.

4. On note S la relation « successeur » dans le graphe G.
   Ainsi, l'écriture « $x \; S \; y$ » signifie que x a pour successeur y dans ce graphe.

   On rappelle les définitions suivantes.
   - Une relation binaire R sur un ensemble E est *symétrique* si pour tous x et y dans E :
   $$x \; R \; y \Rightarrow y \; R \; x.$$
   - Une relation binaire sur un ensemble E est *transitive* si pour tous x, y et z dans E :
   $$x \; R \; y \text{ et } y \; R \; z \Rightarrow x \; R \; z.$$

   a) La relation S est-elle transitive ? Justifier.
   b) Quel(s) arc(s) faut-il ajouter au graphe pour rendre la relation S symétrique ?

Exercice 2 (9 points)

Le but de cet exercice est d'étudier une façon de parcourir un fichier de 195 clients, dont les fiches sont numérotées de 0 à 194.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=3u_n+4$.

1. Déterminer u_1 et u_2.

2. Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 2$.
   a) Déterminer v_0, v_1 et v_2.
   b) Justifier que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   c) Déterminer une expression de v_n en fonction de n.

4. En déduire, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 7\times 3^n - 2$.

Partie B - Étude d'un mode de parcours du fichier

Pour tout entier naturel n, on note w_n le reste de la division euclidienne de $7\times 3^n - 2$ par 195.

On a ainsi, en particulier : $w_n \equiv 7\times 3^n - 2$ modulo 195.

On parcourt le fichier à l'aide de la suite (w_n) en déplaçant un curseur de la façon suivante :

- initialement, le curseur est positionné sur la fiche numéro 5, qui correspond à la valeur w_0 ;
- le curseur se déplace ensuite sur la fiche numéro 19, qui correspond à la valeur w_1 ;
- plus généralement, après n déplacements, le curseur est positionné sur la fiche dont le numéro correspond à la valeur de w_n.

1. Justifier que $w_5 = 139$.

2. Justifier que $3^{13} \equiv 3$ modulo 195. En déduire que $w_{13} = 19$.

3. Soit n un entier naturel quelconque.
   a) Démontrer que $w_{n+13} - w_{n+1} \equiv 7\times 3^n\left(3^{13} - 3\right)$ modulo 195.
   b) En déduire, en utilisant la question **2.**, que $w_{n+13} = w_{n+1}$.
   c) Interpréter le résultat précédent concernant le positionnement du curseur.

4. On donne la liste des 15 premières valeurs de w_n :

   5 – 19 – 61 – 187 – 175 – 139 – 31 – 97 – 100 – 109 – 136 – 22 – 70 – 19 – 61.

   On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, ..., 193, 194\}$ et l'application f de E dans E, définie pour tout entier n de l'ensemble E par : $f(n) = w_n$.
   a) L'application f est-elle injective ? Justifier la réponse.
   b) L'application f est-elle surjective ? Justifier la réponse.