

# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

## SERVICES INFORMATIQUES

### AUX ORGANISATIONS

**SESSION 2017**

**SUJET**

**ÉPREUVE EF2 – MATHÉMATIQUES APPROFONDIES**

**Sous-épreuve UF2 - facultative**

**Seuls les points supérieurs à 10 sont pris en compte.**

**Calculatrice autorisée, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :**

« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.

Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.**

**Il comprend 5 pages numérotées de la page 1/5 à la page 5/5.**

**La page 5 est une page annexe, elle est à rendre avec la copie.**

BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS	SESSION : 2017	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES	SUJET	
17SIEF2MANC1	Durée : 2 heures	Page 1/5

### Exercice 1 (10 points)

Un nouveau smartphone est mis en vente. Soit  $x$  le prix unitaire en centaines d'euro de ce smartphone.

La fonction d'offre des fournisseurs (en milliers de smartphones) est la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; 6]$  par  $f(x) = 0,7 e^{0,5x+2}$  où  $f(x)$  modélise la quantité proposée par les fournisseurs pour un prix unitaire de  $x$  en centaines d'euro.

La fonction de demande des consommateurs (en milliers de smartphones) est la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; 6]$  par  $g(x) = 10 \ln\left(\frac{20}{x}\right)$  où  $g(x)$  modélise la quantité demandée par les consommateurs pour un prix unitaire de  $x$  en centaines d'euro.

Les courbes représentatives  $C_1$  et  $C_2$  de  $f$  et de  $g$  sont tracées dans le repère orthogonal fourni en annexe. Le point d'équilibre de l'offre et de la demande, noté A, est le point d'intersection des courbes  $C_1$  et  $C_2$ .

#### Partie 1

1. Identifier la courbe correspondant à  $f$  et celle correspondant à  $g$ , en justifiant la réponse.
2. À partir d'une lecture graphique, donner les coordonnées  $(x_0 ; y_0)$  du point A. On laissera apparents les traits de construction.

#### Partie 2

Pour déterminer les coordonnées du point A de façon précise, on est amené à résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$ . On pose, pour tout  $x$  appartenant à  $]0 ; 6]$ ,  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

> Calcul formel	
1	$0.7 \exp(0.5x+2)$ Dérivée: $\frac{7}{20} e^{\frac{1}{2}x+2}$
2	$0.7 \exp(0.5x+2)$ Intégrale: $\frac{7}{5} e^{\frac{1}{2}x+2} + c_1$
3	$10 \ln(20/x)$ Dérivée: $-\frac{10}{x}$
4	$10 \ln(20/x)$ Intégrale: $10 \left( x \ln\left(\frac{20}{x}\right) + x \right) + c_2$

1. a) À l'aide de ces résultats, déterminer les fonctions dérivées de  $f$  et de  $g$ .

BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS	SESSION : 2017	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES	SUJET	
17SIEF2MANC1	Durée : 2 heures	Page 2/5

- b) En déduire que la dérivée de  $h$  s'exprime, pour tout  $x$  de  $]0 ; 6]$ , par  $h'(x) = 0,35 e^{0,5x+2} + \frac{10}{x}$ .
2. a) Étudier le signe de  $h'(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; 6]$ .  
 b) On admet que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ . Établir le tableau des variations de  $h$  sur l'intervalle  $]0 ; 6]$ .
3. a) Démontrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$  sur l'intervalle  $[2 ; 3]$ .  
 b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie au centième de  $x_0$ .
4. En déduire le prix unitaire d'équilibre de ce smartphone en euro et le nombre de smartphones disponibles à ce prix (arrondir à la centaine).

### Partie 3

On prendra dans cette question  $x_0 = 2,7$  et  $y_0 = 20$ .

1. À l'aide des résultats du logiciel de calcul formel, donner une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; 6]$ .
2. On appelle « surplus des fournisseurs » le nombre  $S = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx$ .  
 a) Le nombre  $S$  représente l'aire d'un domaine du plan qui est la différence entre deux aires. Hachurer sur la feuille annexe le domaine d'aire  $S$ .  
 b) Calculer la valeur de  $S$  (arrondir au dixième).

### Exercice 2 (10 points)

*Sauf indication contraire, les résultats non entiers seront arrondis au millième. Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.*

#### Partie 1 – calcul de probabilités

Une entreprise fabrique en grande quantité des clés USB. Les clés USB produites peuvent présenter deux défauts : le défaut A et le défaut B.

On sait que :

- 5 % des pièces produites présentent le défaut B ;
- parmi les pièces présentant le défaut B, 20 % ont le défaut A ;
- parmi les pièces ne présentant pas le défaut B, 6 % ont le défaut A.

On appelle  $A$  l'évènement « la clé USB présente le défaut A » et  $B$  l'évènement « la clé USB présente le défaut B ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que la clé USB présente le défaut A.
3. Calculer la probabilité que la clé USB présente le défaut B sachant qu'elle a le défaut A.

#### Partie 2 – loi binomiale

On note  $E$  l'évènement « la clé USB prélevée au hasard dans un stock important a un défaut ». On suppose que  $P(E) = 0,107$ . On prélève au hasard quatre clés USB dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre clés USB. On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à tout prélèvement de quatre clés, associe le nombre de clés USB de ce prélèvement ayant un défaut.

BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS	SESSION : 2017	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES	SUJET	
17SIEF2MANC1	Durée : 2 heures	Page 3/5

1. Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une clé USB soit défectueuse.

### Partie 3 – approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les clés USB sont commercialisées par lot de 1 000. On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'entreprise. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 clés USB. On considère la variable aléatoire  $Y$  qui, à tout prélèvement de 1 000 clés USB, associe le nombre de clés USB présentant un défaut parmi ces 1 000 clés USB. On admet que la variable aléatoire  $Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 1\,000$  et  $p = 0,107$ .

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète  $Y$  par la loi normale de moyenne 107 et d'écart-type 9,78. On note  $Z$  la variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier les paramètres de la loi normale suivie par  $Z$ .
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 95 clés USB présentant un défaut dans le lot de 1 000 clés USB, c'est-à-dire calculer  $P(Z \leq 95,5)$ .

### Partie 4 – loi exponentielle

Un technicien est chargé d'étudier le fonctionnement des clés USB. Après une étude statistique, il est arrivé à la conclusion que la variable aléatoire  $T$  qui, à chaque clé USB, associe sa durée de vie en jour suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,007 \text{ jour}^{-1}$ .

1. Quel est, à un jour près, la durée de vie moyenne d'une clé USB ?
2. Calculer la probabilité pour qu'une clé USB ne soit plus en état de fonctionnement au bout de 200 jours.

BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS	SESSION : 2017	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES	SUJET	
17SIEF2MANC1	Durée : 2 heures	Page 4/5

Modèle CMEN-DOC v2 A4 ONEOPTEC

Nom de famille :

(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

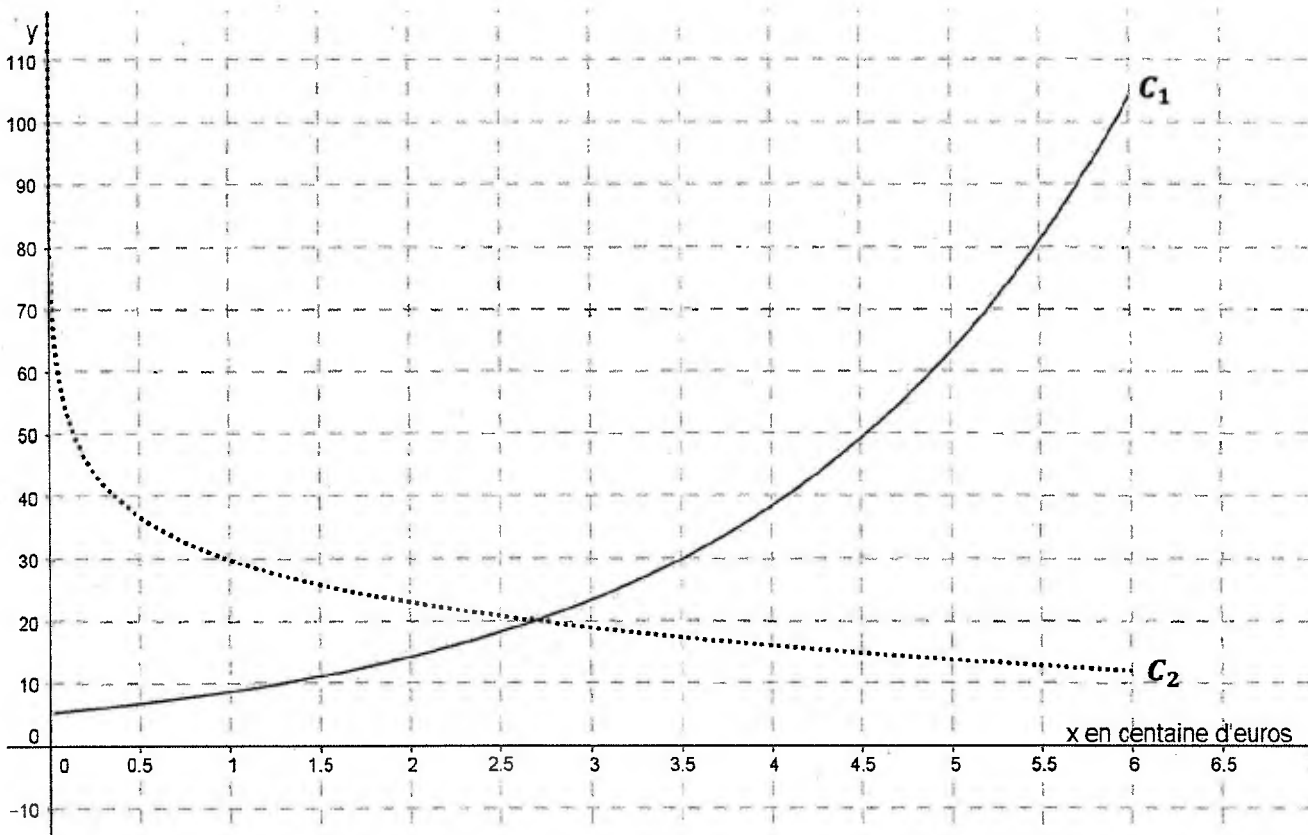
Prénom(s) :

Numéro Inscription :  Né(e) le :  /  /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

**ANNEXE à rendre avec la copie**

**Exercice 1**



BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS	SESSION : 2017	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES	SUJET	
17SIEF2MANC1	Durée : 2 heures	Page 5/5