

BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Sous-épreuve E21 – Mathématiques

Épreuve obligatoire

2021

SUJET

Durée : 2 heures

coefficient : 2

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.

Ce document comporte 6 pages numérotées de la page 1/6 à 6/6

Dès que ce document vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

2021	BTS SIO			Sujet
21-SIE2MAT-MAG Id21A	E21 Mathématiques pour l'informatique	Coef : 2	Durée : 2 h 00	1/6

Exercice 1 (10 points) : Un problème de routage

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère un réseau de commutation de paquets constitués de 6 routeurs A, B, C, D, E et F. Chaque paquet reçu par l'un des routeurs doit être acheminé vers un autre routeur, jusqu'à atteindre sa destination finale.

Dans le tableau ci-dessous, on a résumé les règles de routage d'un routeur à un autre routeur.

Peut transmettre à 	A	B	C	D	E	F
A			■	■	■	
B	■		■		■	■
C					■	
D						
E				■		■
F				■		

On considère le graphe simple orienté **G** constitué des sommets A, B, C, D, E et F. Les sommets représentent les routeurs. Si un sommet X peut transmettre un paquet vers un sommet Y alors on a l'arc $X \rightarrow Y$.

1.

- a. Recopier et compléter le tableau des successeurs et des prédécesseurs du graphe **G** :

Sommets	Prédécesseurs	Successeurs
A		
B		
C		
D		
E		
F		

- b. Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe **G**, les sommets étant rangés par ordre alphabétique.

2.

- a. Calculer M^3 .
 b. Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 allant du sommet B au sommet D ?

2021	BTS SIO			Sujet
21-SIE2MAT-MAG Id21A	E21 Mathématiques pour l'informatique	Coef : 2	Durée : 2 h 00	2/6

3.
 - a. Déterminer la matrice \widehat{M} de la fermeture transitive du graphe \mathbf{G} .
 - b. Que signifie le nombre 1 à l'intersection de la troisième ligne et la sixième colonne de \widehat{M} ?
4. Existe-t-il un chemin hamiltonien dans ce graphe ? Si oui, en indiquer un.

Partie B

Dans un parc informatique, chaque machine connectée à un réseau peut être identifiée à l'aide d'une adresse IPv4.

1.
 - a. Dans la base 2, un octet est constitué de 8 chiffres.
Déterminer le plus grand entier noté en base 10 qu'on peut écrire sous la forme d'un octet.
 - b. Une adresse IPv4 étant constituée de 4 octets notés en base 10 et séparés par un point, quel nombre maximal d'adresses IPv4 peuvent être attribuées ?

Le routeur C de la partie A gère les connexions réseaux d'un parc informatique de 8 machines étiquetées de 1 à 8.

Le DHCP de ce routeur est paramétré de telle façon qu'il attribue une plage de 49 adresses IPv4 allant de 192.168.1.2 jusqu'à 192.168.1.50.

Les 8 machines sont identifiées grâce aux adresses IPv4 suivantes :

Etiquette de la machine	Adresse IPv4 de la machine
1	192.168.1.2
2	192.168.1.4
3	192.168.1.12
4	192.168.1.49
5	192.168.1.48
6	192.168.1.50
7	192.168.1.5
8	192.168.1.6

2. Écrire le premier octet commun aux adresses de ces machines sous forme binaire puis sous forme hexadécimale.

2021	BTS SIO			Sujet
21-SIE2MAT-MAG Id21A	E21 Mathématiques pour l'informatique	Coef : 2	Durée : 2 h 00	3/6

Exercice 2 (5 points)

Le spam, courriel indésirable ou pourriel, est une communication électronique non sollicitée, en premier lieu via le courrier électronique. Il s'agit en général d'envois en grande quantité effectués à des fins publicitaires.

Un étudiant en BTS SIO a développé un logiciel anti spam. Le filtre mis en place par l'étudiant se base sur les trois variables booléennes suivantes :

- a l'objet du message contient au moins un terme douteux (gratuit, offre, promotion, gagner ...), \bar{a} l'objet du message ne contient aucun terme douteux ;
- b le corps du message contient des images ou des hyperliens, \bar{b} le corps du message ne contient ni images, ni hyperliens ;
- c les messages de l'expéditeur sont rarement lus, \bar{c} les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment.

Avec ce logiciel, un courriel est considéré comme indésirable si :

- l'objet du message contient au moins un terme douteux avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens ;
ou
- l'objet du message ne contient aucun terme douteux et les messages de l'expéditeur sont rarement lus ;
ou
- les messages de l'expéditeur sont rarement lus et le corps du message ne contient ni images, ni d'hyperliens ;

1. Traduire chaque condition par une expression booléenne en fonction des variables a , b et c puis déterminer l'expression booléenne E traduisant les conditions pour qu'un courriel soit considéré comme indésirable.

Pour la suite de l'exercice, on admet que $E = ab + c\bar{a} + \bar{b}c$.

2.

- a. Présenter E dans une table de Karnaugh.
- b. Un courriel, ayant comme objet « promotion : une réduction de 50 % ... » et dont les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment, peut-il être considéré comme indésirable ? Justifier.
- c. En utilisant la table de Karnaugh, déduire l'expression simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes dont l'un est éventuellement un produit.

3. Traduire, en français, la règle pour considérer un courriel comme indésirable.

4. Donner une expression de \bar{E} .

2021	BTS SIO			Sujet
21-SIE2MAT-MAG Id21A	E21 Mathématiques pour l'informatique	Coef : 2	Durée : 2 h 00	4/6

Exercice 3 (5 points) : Codage de Hill

Dans le tableau suivant, on associe à chaque lettre de l'alphabet, en majuscule, son rang dans l'alphabet en commençant par 0.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

La procédure pour chiffrer un message est décrite dans l'exemple ci-dessous :

Pour chiffrer le message « **CARTES** » avec la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$:

- On remplace chaque lettre par son rang : C par 2, A par 0, R par 17, T par 19, E par 4 et S par 18. On obtient ainsi une matrice à 3 colonnes $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 17 \\ 19 & 4 & 18 \end{pmatrix}$;
- On effectue le produit matriciel $M \times W$; on a $M \times W = \begin{pmatrix} 36 & 72 & 36 \\ 63 & 114 & 67 \end{pmatrix}$;
- On remplace chaque coefficient de la matrice $M \times W$ par le reste de sa division euclidienne par 26. Ce qui revient à trouver, pour chaque coefficient, l'unique entier compris entre 0 et 25 qui lui est congru modulo 26.
On a $36 \equiv 10 [26]$, $72 \equiv 20 [26]$, $63 \equiv 11 [26]$, $114 \equiv 10 [26]$, $67 \equiv 15 [26]$;
Ainsi on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 11 & 10 & 15 \end{pmatrix}$
- On remplace chaque nouveau coefficient de $M \times W$ par la lettre correspondante ;
on obtient donc $\begin{pmatrix} KUK \\ LKP \end{pmatrix}$;
- Donc le message chiffré est « **KUKLKP** ».

2021	BTS SIO			Sujet
21-SIE2MAT-MAG Id21A	E21 Mathématiques pour l'informatique	Coef : 2	Durée : 2 h 00	5/6

Partie A :

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette clé permet de chiffrer le mot « **BUR** » en « **XMR** »

1. On considère le message « **JUA** ». Déterminer le message chiffré.
2. Que peut-on remarquer ? Que pensez-vous de cette clé de chiffrement ?

Partie B :

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 11 & n & 14 \\ 7 & 9 & 21 \\ 17 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, où n est un

entier naturel compris entre 15 et 25.

On sait que cette clé permet de chiffrer le mot « **GEL** » en « **VMT** ».

1. Vérifier que $6n + 36 \equiv 12 \pmod{26}$.
2. Déterminer la valeur de l'entier naturel n .

2021	BTS SIO			Sujet
21-SIE2MAT-MAG Id21A	E21 Mathématiques pour l'informatique	Coef : 2	Durée : 2 h 00	6/6