BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

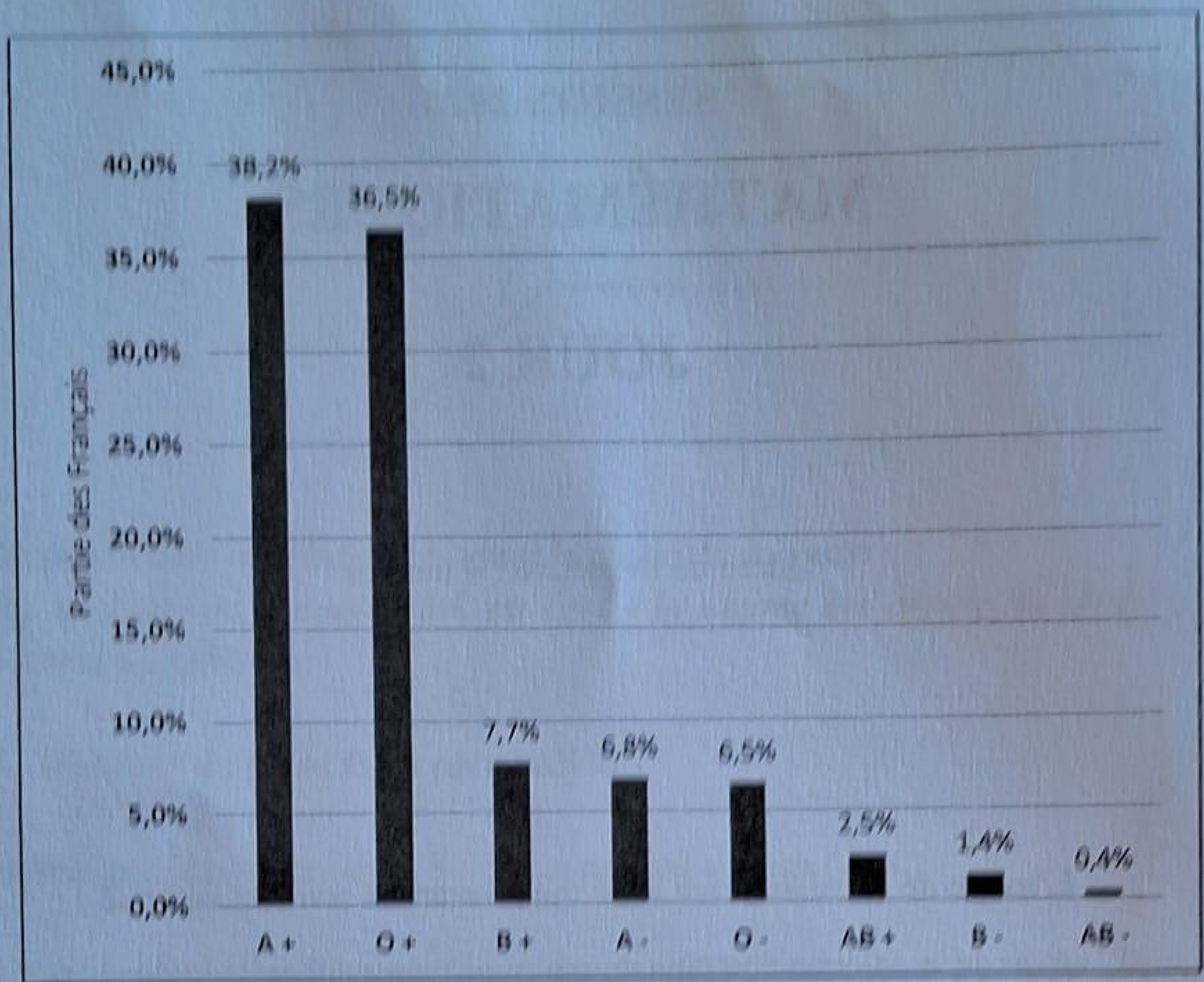
Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Source : https://fr.statista.com/statistiques/656036/groupes-sanguins-repartition-rh-france/

A +, O +, B +, A −, O −, AB +, B − et AB − sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.

Par exemple : A + est le groupe sanguin A de rhésus +.

Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.

Dans l'exercice, on adopte les notations du type :

$A+$ est l'événement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus + »
$A-$ est l'événement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus − »
A est l'événement « la personne est de groupe sanguin A »

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note $Rh+$ l'évènement « La personne est de rhésus positif ».

1. Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.

2. Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que $P_{Rh+}(A) = 0{,}450$ à 0,001 près.

3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus. Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5% de la population française est de groupe $\mathrm{O}-$.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.

   a. Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels.
   Justifier votre réponse.

   b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument `k` écrite en langage Python.

```
def proba(k):
    p = 0
    for i in range(k+1):
        p = p + binomiale(i,50,0.065)
    return p
```

   Cette fonction utilise la fonction `binomiale` d'argument `i`, `n` et `p`, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = \mathrm{i})$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres `n` et `p`.
   Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

EXERCICE 2 (5 points)

Cet exercice contient 5 affirmations.

Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.
Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2$.

1. **Affirmation 1** : La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.

2. **Affirmation 2** : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3. **Affirmation 3** : La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{3}{2} y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur **R**.

1. **Affirmation 4** : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

2. Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on note C_f la courbe représentative de la fonction f solution de (E) tel que $f(0) = 0$.

   Affirmation 5 : La tangente au point d'abscisse 1 de C_f a pour coefficient directeur $2\,e^{\frac{3}{2}}$.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels **R** par :

$$f(x) = (x^2 - 4)\mathrm{e}^{-x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur **R** et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{e}^{-x}$.

3. En déduire les variations de la fonction f sur **R**.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.

2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

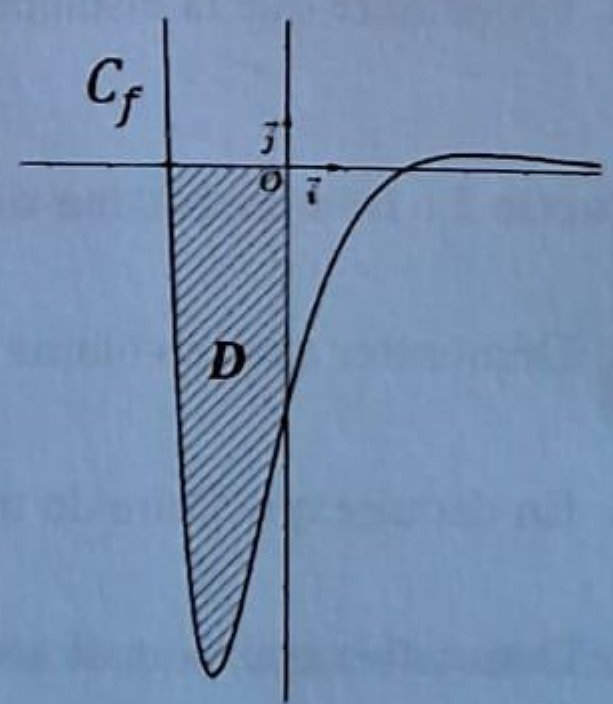
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur **R** de la fonction f définie dans la **partie 1**.

2. On a représenté ci-contre la courbe C_f de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

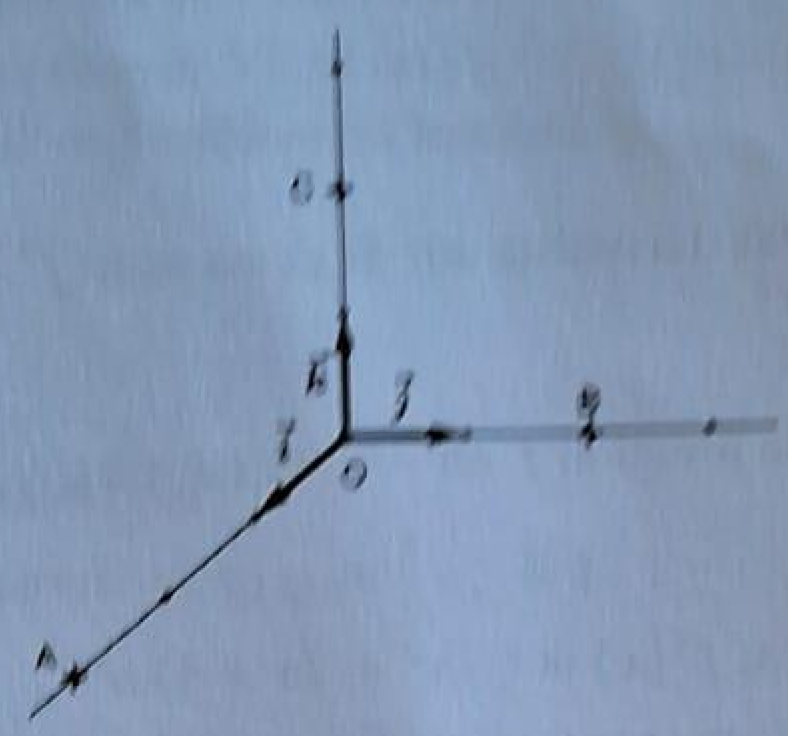


Le domaine $\boldsymbol{D}$ du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire $\boldsymbol{S}$ du domaine $\boldsymbol{D}$.

EXERCICE 4 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les trois points $A(3\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,2)$.



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :
« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétraèdre OABC ».

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;\,3\,;\,3)$ est normal au plan (ABC).

2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x+3y+3z-6=0$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.

4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC). Déterminer les coordonnées du point H.

5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.

2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.

3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, *« le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétraèdre ».*

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}B\times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.